Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

CARLA ISABEL TEIXEIRA TAVARES REBIMBAS DA FONSECA

AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NOS MANUAIS ESCOLARES DO 12.º ANO

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didática - Área de Especialização em Matemática para Professores do 3.º CEB/Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha família pelo incansável apoio.

o júri

presidente

Profª. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu
professor auxiliar da Universidade do Minho

Profª. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

No decurso da elaboração deste estudo, recebi vários auxílios que não posso deixar de registar. À Doutora Teresa Neto, orientadora desta dissertação, agradeço o apoio, a partilha do saber, as observações rigorosas, mas justas, o estímulo e a crescente exigência que me foi impondo à medida que desenvolvia esta investigação. Acima de tudo, foi um desafio que tanto me estimulou intelectual como emocionalmente.

À minha irmã e colega de mestrado, Rosa, pelo apoio e permanente incentivo necessários à concretização deste trabalho.

Aos meus pais pelo auxílio que me prestaram e por serem um exemplo de coragem e perseverança.

Por fim, ao meu marido, Carlos e aos meus filhos, Carlos e Luísa, que muitas vezes sofreram a minha ausência, mas que foram sempre o meu porto seguro.

palavras-chave

Manuais escolares, Ensino Secundário, Enfoque ontossemiótico, Adequação didática, Funções exponencial e logarítmica

resumo

A presente investigação estuda a forma como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas nos manuais escolares do 12.º ano de Matemática A, em vigor em Portugal no ano letivo 2012-2013 e como é feita a sistematização e consolidação dos conhecimentos que daí advém. Em concreto, foram analisadas as situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o manual do estudante apresenta. No que diz respeito às situações matemáticas, foram contabilizados os diferentes tipos de tarefas que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conhecimentos. Foi ainda analisada a adequação didática das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares.
A escolha de um tema de funções, justifica-se pelo papel importante que têm no currículo do Ensino Secundário e por serem um alicerce fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

O estudo alicerça-se na revisão da literatura sobre a análise de manuais, o currículo de Matemática do Ensino Secundário e nos pressupostos teóricos e metodológicos do enfoque ontossemiótico do conhecimento e do ensino da Matemática. Dada a problemática em estudo, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa. A técnica utilizada foi a análise documental e o instrumento de recolha de dados uma grelha de análise.

Relativamente à adequação didática das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares, conclui-se, pela análise das suas componentes epistémica, mediacional e ecológica, que há adequação. No entanto, verifica-se que é privilegiado o cálculo algorítmico, em detrimento das tarefas de exploração, conjeturar, argumentar e modelação, que quase não têm expressão em todos os manuais. O presente estudo alerta para o facto de haver uma necessidade crescente de diversificação de tarefas propostas nos manuais escolares.

keywords

School textbooks, secondary education, onto-semiotic focus, didactic adequacy, exponential and logarithmic functions

abstract

This research studies the way the exponential and logarithmic functions are covered in the school textbooks of the 12th grade of mathematics A, currently in use in the 2012-2013 school year and how the consequent systematization and consolidation of knowledge is achieved. The mathematical situations, concepts, propositions, procedures, language and arguments that the student's textbook presents were analyzed in particular. In what concerns mathematical situations, the different types of tasks that the authors propose for the student to apply the knowledge acquired have been accounted for. The didactic adequacy of exponential and logarithmic functions in school textbooks was also considered.
The choice of a theme of functions is justified by the important role they have in the curriculum of Secondary Education and for being a fundamental basis for students who enroll in several courses in higher education.

This study is based on literature review on the analysis of school textbooks, the mathematics curriculum of secondary school and on the theoretical and methodological assumptions of the onto-semiotic approach to knowledge and the teaching of mathematics. Considering the topic being studied, the qualitative methodology was privileged. The technique used was the documentary analysis and a grid of analysis was chosen as a data collection instrument.

In what regards the didactic adequacy of the exponential and logarithmic functions in school textbooks, by the analysis of its epistemological, mediating and ecological components, it is concluded that there is adequacy. However, it appears that the algorithmic calculation is privileged, at the expense of exploration tasks, modelling, conjecture and arguing, which have almost no expression at all in school textbooks. This study draws attention to the fact that there is a growing need for the diversification of the tasks proposed in school textbooks.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nesta secção preliminar, explicita-se a problemática do estudo, a pertinência do trabalho proposto, as questões e os objetivos de investigação e, como síntese final, faz-se uma abordagem à estrutura da dissertação.

1.1 Motivação e pertinência da investigação

Em Portugal, um dos maiores desafios da educação corresponde à necessidade de assegurar a qualidade do sistema educativo, quando os recursos económicos se tornam escassos e há um aumento das expectativas relativamente ao contributo da escola para o desenvolvimento da sociedade.

Uma das áreas que pode contribuir significativamente para a melhoria do sistema de ensino é a dos recursos didáticos. Deste conjunto, pretendemos destacar o manual escolar por ser o recurso educativo que, numa sociedade com o ideal de disponibilizar o acesso a uma educação de qualidade para todos, está acessível a todos os estudantes, independentemente do seu estatuto cultural, sócio-económico ou da região em que vivem.

O manual deve permitir ao estudante adquirir conteúdos, valores e atitudes, não só pela leitura das informações que fornece mas, também, pelas propostas de trabalho que sugere. Sendo o recurso didático mais usado pelo professor de Matemática (APM, 1998), o manual serve de mediador entre o professor e o estudante, quer ao nível dos conteúdos a abordar, quer no que respeita às tarefas a desenvolver. Daí a importância do manual refletir os objetivos gerais e as sugestões metodológicas dos programas escolares em vigor (Viseu, Fernandes e Gonçalves, 2009).

O Conselho Nacional de Educação (CNE, 2006) considera o manual escolar como um instrumento que, quando possui qualidade científica e didática, é um valioso auxiliar do processo de aprendizagem do estudante.

Com este estudo procuramos averiguar de que forma o manual escolar do 12.º ano de Matemática A, adotado nas Escolas Secundárias, aborda numa perspetiva didática o tópico das funções exponenciais e logarítmicas do tema “Introdução ao cálculo Diferencial II”. Pretendemos, ainda, refletir sobre a adequação didática do desenvolvimento deste tópico nos manuais escolares.

Este estudo envolverá, necessariamente, a análise do programa da disciplina de Matemática A, brochura das funções do 12.º ano e da didática, manuais escolares, e outros documentos afins relacionados com o ensino dos referidos conceitos.

Ao refletir acerca das razões que me conduziram a ingressar no Mestrado em Didática - Área de Especialização: Matemática para Professores do 3.º CEB/Secundário, apercebi-me de que a minha primeira motivação se relacionou com uma das hipóteses enumeradas por Alarcão (2001, p. 135): “Para obter um grau”. Ao contrário de alguns colegas que iniciaram o ano curricular do mestrado sabendo já sobre que temáticas gostariam de se debruçar, eu sabia apenas que os meus interesses se situavam, ambiguamente, no âmbito do desenvolvimento de competências matemáticas em estudantes do Ensino Secundário. Estes interesses foram surgindo da minha prática docente, de quase 20 anos, neste nível de ensino.

O tipo de trabalho que poderia desenvolver no âmbito da Matemática e que, de algum modo, fosse ao encontro das minhas motivações iniciais pouco definidas, tornou-se claro a partir do contacto com os trabalhos desenvolvidos por Ordóñez (2011), que utiliza o marco teórico do enfoque ontossemiótico (EOS) do conhecimento e educação Matemática, para analisar diferentes facetas da atividade Matemática e pelo projeto KOM[1], que esteve na base da categorização de oito competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes de todos os níveis de ensino.

Desta forma, se no início do meu percurso o objetivo era a obtenção de um grau, logo, um objetivo essencialmente instrumental, ao tomar contacto com os trabalhos atrás referidos e

[1] KOM - "Kompetencer Og Matematiklæring", dinamarquês para "Competências e Aprendizagem de Matemática”, projeto dirigido por Morgens Niss. (Mais informação está disponível em http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf).

com o decurso da construção do projeto de investigação e do meu crescimento enquanto investigadora, fui descobrindo aquilo que Alarcão (2001, p. 135) defende ser a "verdadeira essência de ser investigador": "o desejo de conhecer e, se possível, intervir".

A importância da análise de manuais, decorre do facto de o professor quando planifica as suas aulas nem sempre trabalhar diretamente com os programas, mas sim com os manuais que funcionam como guias de estruturação da aula, o que faz com que os manuais sejam um fator decisivo para a existência de uma estrutura invariante da ação didática do professor (Zabalza, 1992).

Na revisão de literatura sobre a análise de manuais, verificamos que uns estudos centram--se no manual escolar como objeto de análise (sejam manuais atuais ou do passado) e outros estudos centram-se mais nos modos como o manual escolar é usado pelos professores. Começamos por referir o trabalho de Jorge (1994) que num capítulo da sua tese de mestrado analisou diversos manuais de Matemática no tema das sucessões, apoiando-se numa grelha que desenvolveu para o efeito.

Um outro estudo desenvolvido por Cabrita (1996) incidiu no modo como os manuais escolares do 7.º ano de escolaridade abordam o tópico da proporcionalidade direta, tendo usado, para o efeito, uma grelha de análise com diversos itens muitos dos quais diretamente relacionados com este tópico matemático.

No relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), que tem por base um levantamento da situação do ensino da Matemática em Portugal, indica-se que o manual escolar é o material didático mais utilizado pelos professores do 2.º e 3.º ciclos e do Ensino Secundário (82% usa-o em muitas aulas ou sempre ou quase sempre). Um ano mais tarde, Cabrita (1999) analisou o uso que os professores de Matemática do 7.º ano de escolaridade fazem do manual escolar na unidade didática que aborda a proporcionalidade direta.

Silva (2003, 2004) analisou quatro manuais escolares da disciplina de Matemática, do 9.º ano de escolaridade. O estudo teve como objetivo principal a discussão da problemática da análise dos manuais escolares, centrando-se em estudar a adequação do programa e do currículo nos manuais de um ano de escolaridade, comparando-os no seu conteúdo, na sua estrutura, na comunicação e nas características materiais. Outro autor, Pires (2003a, 2003b) realizou um estudo, tendo em vista compreender as (inter)influências do manual escolar na construção do conhecimento profissional do professor do 1.º ciclo do Ensino Básico relativamente ao ensino da Matemática.

Numa conferência realizada no ProfMat, Janeiro (2005) relatou os resultados de um estudo sobre as perspetivas dos professores relativamente aos manuais escolares. A investigação incidiu sobre os manuais escolares do 7.º ano editados em Portugal no ano de 2002. Henriques e Almeida (2005) analisam a presença de aspetos lúdicos, nos problemas propostos nos primeiros livros de Aritmética publicados em Portugal no século XVI.

Costa (2005) descreve os manuais escolares elaborados por José Vicente Gonçalves para o Ensino Liceal na década de 30 em Portugal. Ponte (2005a) identifica aspetos que foram mudando na abordagem das equações do 1.º grau em quatro manuais escolares portugueses, um do fim do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática Moderna (anos 70) e um dos anos 90.

Marques (2006), analisa a forma como é abordada a proporcionalidade direta, em quatro manuais escolares de diferentes países. Um ano mais tarde, Oliveira (2007) realiza a investigação intitulada: uma análise da abordagem da Álgebra nos manuais escolares do 3.º ciclo de escolaridade. A investigação incide na análise da abordagem da Álgebra, em manuais escolares de Portugal e de Espanha, sendo três portugueses e um espanhol.

Silva (2009), analisa o tema dos números racionais em quatro manuais de Matemática, do 5.º ano. No mesmo ano, Viseu, Fernandes e Gonçalves (2009) averiguam como os professores de Matemática que lecionam os 9.º e 12.º anos de uma Escola, usam o manual escolar, dentro e fora da sala de aula. Martinho e Viseu (2009) analisam dois manuais do 7.º ano com o objetivo de compreender de que forma esses manuais contribuem para promover o desenvolvimento da literacia estatística.

Santos (2010) dedica um capítulo da sua tese de mestrado, à forma como tem sido feita a abordagem do conceito de limite nos manuais escolares e nos diversos programas da disciplina, numa perspetiva histórica. Um ano mais tarde, Abreu (2011), desenvolveu um estudo, numa perspetiva histórica e didática, do Cálculo Diferencial no ensino da Matemática em Portugal, tendo como ponto de partida o Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva e como pano de fundo a Matemática Moderna.

No mesmo ano, Viseu e Morgado (2011) divulgam alguns resultados de um estudo de caso realizado com professores de Matemática que lecionam os 9.º e 12.º anos de escolaridade, em dois agrupamentos de escolas do distrito de Braga, com o objectivo de averiguar de que forma(s) os professores integram os manuais escolares nas atividades que desenvolvem na escola, em particular ao nível da sala de aula, bem como os sentidos que conferem à utilização destes recursos. Um ano mais tarde Mateus (2012) analisa a dimensão crítica da literacia estatística nos manuais escolares.

Da revisão de literatura sobre a análise de manuais, concluímos que, são poucos os trabalhos que têm como campo investigativo os manuais do 12.º ano e não encontrámos nenhum, em Portugal, com o mesmo quadro teórico do nosso, que analise todos os manuais em vigor no ano letivo a que se refere o projeto.

O ensino de funções é um dos assuntos que acompanha a trajetória dos estudantes desde o Ensino Básico, sendo ampliado esse universo de estudo durante o Ensino Secundário e constitui-se como alicerce fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior. Dos três temas avaliados no Exame Nacional de Matemática A, o das funções é o mais valorizado.

A minha experiência no ensino da Matemática ao nível do Secundário e nomeadamente no ensino de funções, fez com que me defrontasse com a realidade que é o ensino/aprendizagem dos conceitos matemáticos de "função exponencial" e " função logarítmica" e me questionasse acerca da forma como são abordados nos diferentes manuais adotados em Portugal. A participação na correção dos Exames Nacionais permitiu ter uma visão mais global dos erros na compreensão e aplicação destes conceitos. O relatório do Projeto Testes Intermédios de 2012 refere que para a resolução de um dos itens em que os estudantes obtiveram pior desempenho “os alunos deviam conhecer propriedades operatórias dos logaritmos e das potências, e aplicá-las de modo trivial” (Gave, 2012, p. 59).

A aprendizagem desta disciplina não consiste apenas na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de técnicas e de regras, mas no desenvolvimento da capacidade no uso da Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e para comunicar.

O relatório dos Exames Nacionais de Matemática A de 2011 apresenta como proposta de intervenção didática,

> “reforçar o cálculo algébrico, o desenvolvimento de raciocínios demonstrativos e a utilização da calculadora gráfica, diversificando estratégias de forma a otimizar as suas potencialidades e a desenvolver nos alunos a capacidade de analisar e interpretar os dados por ela gerados ” (Gave, 2011, p. 53).

Também o relatório do Gave (2012) refere que, os estudantes deverão ser incentivados a alcançarem “resultados de excelência” em itens que envolvam apenas conhecimentos ou aplicações rotineiras e que as dificuldades acentuam-se nos itens em que se torna necessário analisar, transferir, relacionar conhecimentos e resolver problemas não rotineiros.

Assim, pretendemos averiguar de que forma os manuais escolares do 12.º ano de Matemática A adotados nas Escolas Secundárias abordam, numa perspetiva didática, o tópico das funções exponenciais e logarítmicas.

1.2 Questões e objetivos de investigação

Situando-nos nas questões da investigação, elas deverão, por um lado, fazer refletir, o mais corretamente, a finalidade do estudo e, por outro, permitirem a obtenção de respostas no tempo definido e com os recursos existentes. Neste contexto, pretendemos obter resposta para as seguintes questões:

- Que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

- Quais os conceitos, proposições e procedimentos utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

- Que tipo de linguagem e argumentações são utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

- Qual a adequação epistémica, mediacional e ecológica, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares?

Para responder às questões anteriores, teremos presente os seguintes objetivos de investigação:

- Identificar o significado pretendido, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais e no programa de Matemática A.

- Analisar a rede de entidades primárias: situações, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentações, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares.

- Analisar as componentes epistémica, mediacional e ecológica, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares.

1.3 Estrutura da dissertação

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro, explicita-se a motivação, baseada na minha experiência profissional e na revisão da literatura sobre a análise de manuais, a pertinência do estudo, os objetivos e as questões de investigação do mesmo.

No segundo capítulo apresenta-se o enquadramento teórico do estudo, estruturado por três pontos. No primeiro ponto faz-se uma breve apresentação do processo de adoção e certificação de manuais escolares. No segundo, aborda-se a noção de currículo, dando especial atenção ao currículo de Matemática do Ensino Secundário, apresentam-se as orientações curriculares para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, faz-se uma descrição das competências matemáticas, que se devem desenvolver nos estudantes dos diferentes níveis do sistema de ensino e termina-se com uma abordagem ao tipo de tarefas matemáticas que devem ser usadas no processo de ensino e aprendizagem. No terceiro ponto descreve-se o modelo teórico – enfoque ontossemiótico do conhecimento e do ensino da Matemática.

O terceiro capítulo é dedicado à metodologia adotada para a realização do presente trabalho. Para além da descrição do instrumento de recolha de dados da análise documental que nos propomos realizar, são também apresentados os manuais escolares que são objeto da nossa análise.

No quarto capítulo apresenta-se a recolha de dados dos seis manuais escolares do 12.º ano de escolaridade, em vigor no ano letivo 2012-2013, procede-se à análise dos diferentes tipos de situações matemáticas propostas e descrevem-se os resultados obtidos referentes à análise da adequação das componentes epistémica, mediacional e ecológica nos manuais escolares, tendo em conta os indicadores descritos no quadro teórico da investigação.

Finalmente, no quinto capítulo são apresentadas as conclusões sustentadas pelo corpo teórico da investigação e pela análise dos dados recolhidos, contribuições e limitações da investigação, bem como recomendações para futuras investigações.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO DO ESTUDO

Neste trabalho vamos utilizar algumas noções teóricas desenvolvidas por Godino[2] e os seus colaboradores, que constituem o enfoque ontossemiótico (EOS) sobre o conhecimento e educação Matemática e que nos vão ser úteis para efetuar a análise dos seis manuais escolares, adotados em Portugal continental e nos arquipélagos da Madeira e dos Açores, no ano letivo 2012-2013. A revisão da literatura vai-nos permitir clarificar alguns termos que vão ser utilizados ao longo deste trabalho, nomeadamente manual escolar, currículo, orientações curriculares, competências e tarefas matemáticas.

2.1 O manual escolar – certificação e adoção

O manual escolar é o instrumento educativo mais usado pelos docentes. Tendo tanta importância no processo de ensino-aprendizagem, a sua análise torna-se indispensável. Nos documentos oficiais portugueses, o manual escolar é definido como sendo um instrumento fundamental na aprendizagem dos estudantes. Por manual escolar entende-se:

> "o recurso didático-pedagógico relevante, ainda que não exclusivo, do processo de ensino e aprendizagem, concebido por ano ou ciclo, de apoio ao trabalho autónomo do aluno que visa contribuir para o desenvolvimento das competências e das aprendizagens definidas no currículo nacional para o ensino básico e para o ensino secundário, apresentando informação correspondente aos conteúdos nucleares dos programas em vigor, bem como propostas de atividades didáticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientações de trabalho para o professor[3]".

Segundo Cabrita (1999), o manual escolar é um livro que aborda, interpretativamente, o programa de determinada disciplina para determinado ano de escolaridade, não só em termos conceptuais, como também metodológicos, políticos, culturais e sociais.

[2] Parte destes trabalhos estão disponíveis na Internet, em http://www.ugr.es/local/jgodino.
[3] Decreto-Lei n.º 47/2006 de 28 de agosto, artigo 3.º

As funções do manual escolar desenvolvem-se a vários níveis, destacando-se as funções relativas ao estudante, orientadas para as aprendizagens escolares, como são o caso da transmissão de conhecimentos, desenvolvimento de capacidades e competências e consolidação das aquisições e aprendizagens. Podemos ainda destacar as funções de ligação das aprendizagens à vida quotidiana e profissional, articulando os interesses da escola com os do futuro cidadão, em que se podem enquadrar as funções de avaliação das aquisições, de ajuda na integração das aquisições e de avaliação social e cultural (Santo, 2006). O papel deste recurso é enfatizado ao nível da sua ação pedagógica, quanto ao papel informativo, ao papel de estruturação e organização da aprendizagem e quanto ao papel de guia da aprendizagem.

Ao longo das últimas décadas houve um grande aumento do número de manuais escolares disponíveis no mercado. Esta grande proliferação de manuais escolares, no sistema de ensino português, fez sentir a necessidade de uma entidade que regule e analise a qualidade dos manuais escolares. Surge, então, a Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, que no Artigo 2.º define o regime de avaliação, certificação e adoção de manuais escolares e outros recursos didático-pedagógicos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, que assenta em determinados princípios orientadores relativamente à "qualidade científico-pedagógica dos manuais escolares e à sua conformidade com os objetivos e conteúdos do currículo nacional e dos programas e orientações curriculares"; no Artigo 12.º (ponto 1) indica-se que "o resultado da avaliação efetuada pelas comissões de avaliação exprime-se numa menção de Certificado ou Não Certificado", podendo "o editor ou autor cujo manual seja objeto de certificação publicitá-la pelos meios que entender convenientes, designadamente pela aposição dessa menção na capa ou na contracapa do manual" (ponto 4).

O reconhecimento dos manuais escolares como um instrumento fundamental do ensino e da aprendizagem levou o sistema político a garantir a estabilidade dos mesmos de modo a respeitar os interesses económicos das famílias com vários filhos em idade escolar mas também a garantir a qualidade científica e pedagógica assegurada através de um sistema de apreciação e controle. O Decreto - Lei n.º 261/2007, de 17 de julho, que regulamenta a Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, define nos artigos 8.º e 9.º, as normas gerais a que deve obedecer a acreditação de entidades para a certificação de manuais escolares, assim como os critérios e demais procedimentos a realizar.

Um outro aspeto considerado na legislação é o período de vigência dos manuais escolares, do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Em regra, é de seis anos, devendo ser idêntico ao dos programas das disciplinas a que se referem (ponto 1 do Artigo 4.º da Lei n.º 47/2006 e ponto 1 do artigo 2.º do Decreto-Lei n.º 261/2007), procurando-se assim, contribuir para a estabilidade da organização pedagógica nas escolas, e facultar às famílias, através da possibilidade de reutilização, uma redução dos encargos com a sua aquisição.

Assim, a legislação procura garantir o acesso de todos os estudantes a um recurso didático-pedagógico adequado ao desenvolvimento das competências e aprendizagens previstas no currículo nacional, de acordo com o contexto socioeducativo específico da escola e, ao mesmo tempo, garantir a qualidade científica e pedagógica desses recursos tornando-os instrumentos adequados ao ensino e à aprendizagem e promotores do sucesso. Ou seja, através da legislação referida, pretende-se seguir uma política de justiça social e imparcialidade relativamente ao acesso e às condições de utilização dos manuais, corrigindo a ideia que sejam um produto descartável, e reforçando-os como instrumentos educativos e recursos culturais essenciais, para uma franja da nossa sociedade que ainda tem dificuldades em aceder a outros bens culturais.

O Despacho n.º 29864/2007 do Gabinete do Secretário de Estado Adjunto e da Educação, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 249 de 27 de dezembro, inclui um anexo que especifica os critérios de avaliação para certificação dos manuais escolares. Assim, o manual é certificado em relação: (i) ao rigor linguístico, científico e conceptual; (ii) à adequação ao desenvolvimento das competências; (iii) à conformidade com os programas e orientações curriculares; (iv) à qualidade pedagógica e didática; (v) aos valores; (vi) à possibilidade de reutilização e adequação ao período de vigência previsto; e (vii) à qualidade material, nomeadamente, a robustez e o peso. Da avaliação destes critérios, resulta a menção de Certificado ou Não certificado.

No entanto, o referido Decreto - Lei n.º 261/2007, de 17 de julho, permite também criar as condições para o exercício efetivo da autonomia dos docentes, no quadro dos órgãos de coordenação pedagógica dos seus estabelecimentos de ensino, através da seleção, de entre os manuais escolares certificados, aqueles que melhor se adequam aos respetivos projetos educativos.

Acrescenta-se ainda, que o regime de avaliação, certificação e adoção de manuais escolares aplicou-se a partir do ano letivo de 2008/2009, em condições fixadas pelo Despacho n.º 415/2008, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 3 de 4 de janeiro de 2008. Reforça-se o nível de exigência, visando a elevação da qualidade dos manuais escolares, determinando que a sua entrada em vigor se faça de forma segura e em condições que permitam a adaptação de todos os agentes envolvidos, pelo que se estabelece e publicita o calendário das adoções dos manuais escolares. Essa adoção realiza-se no 3.º período do ano letivo anterior ao início da vigência dos manuais escolares, sendo da competência do respetivo órgão de coordenação e orientação educativa.

Os critérios de apreciação de manuais escolares ainda não submetidos a avaliação e certificação estão distribuídos por quatro domínios: i) organização e método; ii) informação; iii) comunicação; e iv) características materiais. No entanto as respetivas componentes de análise têm uma formulação muito genérica podendo conduzir a interpretações diversificadas, de acordo com as conceptualizações que os professores têm.

No domínio da o*rganização e método* são analisados os seguintes critérios: apresenta uma organização coerente e funcional, estruturada na perspetiva do aluno; desenvolve uma metodologia facilitadora e enriquecedora das aprendizagens; estimula a autonomia e a criatividade; motiva para o saber e estimula o recurso a outras fontes de conhecimento e a outros materiais didáticos; permite percursos pedagógicos diversificados; contempla sugestões de experiências de aprendizagem diversificadas, nomeadamente de atividades de caráter prático/experimental e propõe atividades adequadas ao desenvolvimento de projetos interdisciplinares.

Em termos de *informação* é analisado se o manual se adequa ao desenvolvimento das competências definidas no currículo do respetivo ano e/ou nível de escolaridade; responde aos objetivos e conteúdos do programa/orientações curriculares; fornece informação correta, atualizada, relevante e adequada aos alunos a que se destina; explicita as aprendizagens essenciais; promove a educação para a cidadania e não apresenta discriminações relativas a sexos, etnias, religiões, deficiências...

No âmbito da c*omunicação* é apreciado se a conceção e a organização gráfica do manual facilitam a sua utilização e motivam o aluno para a aprendizagem; se os textos são claros, rigorosos e adequados ao nível de ensino e à diversidade dos alunos a que se destinam e se os diferentes tipos de ilustrações são corretos, pertinentes e se relacionam adequadamente com o texto.

Quanto às c*aracterísticas materiais* é analisado se o manual apresenta robustez suficiente para resistir à normal utilização; se o formato, as dimensões e o peso do manual (ou de cada um dos seus volumes) são adequados ao nível etário do aluno e se permite a reutilização.

Cada um dos critérios é avaliado em muito bom, bom, suficiente ou insuficiente. A classificação de insuficiente corresponde à não adoção do manual.

A análise de manuais escolares que vamos realizar vai ao encontro, da maior parte dos critérios incluídos nos três primeiros domínios. Deste modo, o estudo poderá fornecer argumentos aos professores, para uma melhor escolha dos manuais escolares, com base numa análise mais crítica e reflexiva.

Os critérios de apreciação de manuais escolares submetidos a avaliação e certificação apenas têm em conta a sua adequação ao Projeto Educativo da Escola. Neste domínio, são analisados tendo em conta as características do público-alvo, as características do meio envolvente e a diversidade social e cultural da comunidade escolar.

Cada um dos critérios é avaliado em muito adequado, adequado, pouco adequado ou não adequado. A classificação de não adequado corresponde à não adoção do manual.

Em anexo apresenta-se, a título de exemplo, a grelha de registo de apreciação e seleção de manuais escolares para o ano letivo 2012/2013. De referir que este ano letivo foram adotados novos manuais de Matemática A para o 12.º ano, tendo sido utilizados na sua adoção os critérios de apreciação de manuais escolares não submetidos a avaliação e certificação, uma vez que, ao nível do Ensino Secundário ainda não existiam manuais de Matemática certificados.

2.2 O currículo

Encontra-se o que se entende por currículo nacional no Decreto-Lei n.º 74/2004 de 26 de março, Artigo 2.º, que passo a transcrever:

> 1 — Para efeitos do disposto no presente diploma, entende-se por currículo nacional o conjunto de aprendizagens a desenvolver pelos alunos de cada curso de nível secundário, de acordo com os objetivos consagrados na Lei de Bases do Sistema Educativo. 2 — O currículo nacional concretiza-se em planos de estudo elaborados com base nas matrizes curriculares anexas ao presente diploma, do qual fazem parte integrante. 3 — As aprendizagens a desenvolver pelos alunos de cada curso de nível secundário têm como referência os programas das respetivas disciplinas, homologados por despacho do Ministro da Educação, bem como as orientações fixadas para as áreas não disciplinares. 4 — As estratégias de desenvolvimento do currículo nacional são objeto de um projeto curricular de escola, integrado no respetivo projeto educativo.

Na educação, o currículo não se esgota em si mesmo, deixando antever um fenómeno inacabado e sempre dinâmico. Segundo Roldão (1999, p. 16), currículo é “o conjunto de aprendizagens que, por se considerarem socialmente necessárias num dado tempo e contexto, cabe à escola garantir e organizar”. Assim, a autora entende o currículo como “uma realidade socialmente construída, que caracteriza a escola como instituição em cada época” e em construção permanente, abandonando, deste modo, uma visão naturalista de currículo como um figurino estável de disciplinas (Roldão, 1999, p. 26).

Gimeno (2000) apresenta um modelo de desenvolvimento curricular com base numa conceção processual de currículo. Neste modelo, considera diferentes currículos, cada um resultante da ação de diferentes intervenientes.

Assim, a definição de currículo de Gimeno (2000) baseia-se num modelo subdividido em cinco níveis de desenvolvimento curricular que interagem entre si: o *currículo prescrito* definido pelas equipas de especialistas por proposta do Ministério da Educação; o *currículo apresentado*, constituído pelos programas, manuais e outros documentos/materiais de apoio à prática letiva onde surgem as principais linhas do currículo prescrito; o *currículo moldado* pelos professores nas planificações de forma a colocar em prática o currículo prescrito; o *currículo em ação* como o conjunto de contextos de aprendizagens que o professor coloca em prática; e o *currículo avaliado* aquilo que é avaliado. Explicitam-se, de seguida, com mais pormenor, cada um destes cinco níveis.

Em primeiro lugar, o *currículo prescrito* é ditado pelos órgãos político-administrativos e tem um papel de prescrição ou orientação relativamente ao conteúdo do currículo, sobretudo no que diz respeito à educação obrigatória. Funciona como referência básica relativamente à ordenação do sistema curricular, à elaboração de materiais curriculares e no controlo do sistema.

Em segundo lugar, o *currículo apresentado* é aquele que chega aos professores através dos meios ou materiais curriculares, dos quais tem papel de destaque o manual escolar. Estes materiais colocam à disposição do professor uma interpretação do currículo, geralmente mais concretizada e orientada para a prática letiva, facilitando-lhes a atividade de planificação.

Em terceiro lugar, o *currículo moldado* é aquele que resulta da interpretação do professor, seja a partir do currículo prescrito ou dos materiais curriculares. O professor é um agente decisivo na concretização do currículo, é um tradutor que intervém na configuração do significado das propostas curriculares, nomeadamente quando realiza o trabalho de planificação, o que tanto pode ser feito individualmente ou em grupo.

Em quarto lugar, o *currículo em ação* é o que é praticado na realidade escolar, o que o professor põe em prática junto dos seus estudantes. Dá-se no momento em que este leciona as suas aulas, em que concretiza com os estudantes aquilo que preparou (a chamada instrução).

Finalmente, o *currículo avaliado* é aquele que é valorizado por ser nele que incidem os testes ou avaliações externas e que, por sua vez, acaba por impor critérios de relevância para o ensino do professor e para a aprendizagem dos estudantes. Através do currículo avaliado salienta-se aquilo que verdadeiramente vale, o que verdadeiramente conta. Por isso, os exames externos têm um forte efeito regulador, quer das práticas do professor, quer do que os estudantes (e pais) consideram que vale a pena aprender.

Este autor usa um esquema circular, figura 1, para ilustrar o dinamismo e inter-relação entre as diferentes faces do currículo, que correspondem às diferentes fases do processo de desenvolvimento curricular quando globalmente entendido.

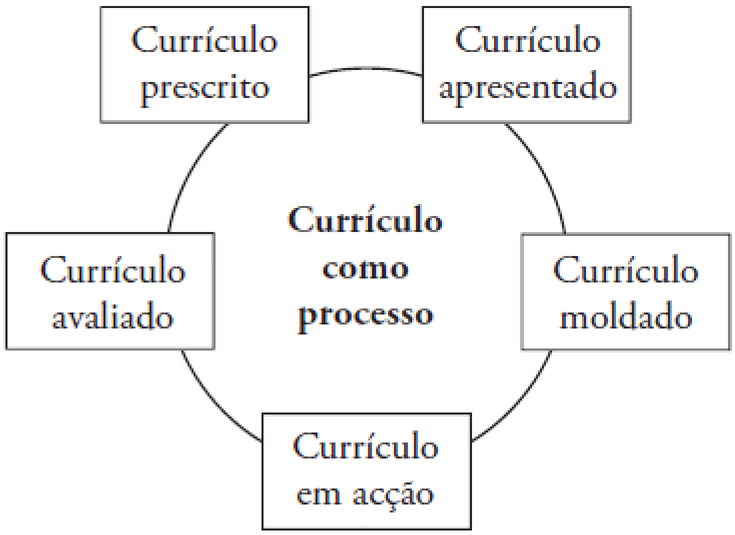


Figura 1 - O currículo como processo (adaptado de Gimeno, 2000, p. 139).

Este conceito de currículo como processo é partilhado por Pacheco (2001), que afirma:

> "O currículo, apesar das diferentes perspetivas e dos diversos dualismos, define-se como um projeto, cujo processo de construção e desenvolvimento é interativo, que implica unidade, continuidade e interdependência entre o que se decide ao nível do plano normativo, ou

> oficial, e ao nível do plano real, ou do processo de ensino-aprendizagem. Mais ainda, o currículo é uma prática pedagógica que resulta da interação e confluência de várias estruturas (políticas, administrativas, económicas culturais, sociais, escolares...) na base das quais existem interesses concretos e responsabilidades compartilhadas” (p. 20).

Este autor também distingue diversos níveis de currículo. O currículo oficial é o currículo determinado oficialmente pela administração Central do Sistema Educativo decorrente da Lei de Bases, dos Decretos, Despachos e dos programas, enquanto o currículo real é o currículo que é seguido na prática. Currículo oficial ou formal é o currículo determinado por uma decisão político-administrativa. É neste contexto que é defendida a normatividade curricular (Pacheco, 2001).

O currículo informal é considerado de grande importância formativa, com base nos mecanismos de enriquecimento do currículo escolar. As escolas desenvolvem atividades que têm a ver com desportos, atividades artísticas, grupos de música ou teatro, complementos de línguas estrangeiras, trabalhos práticos, programas de visitas e intercâmbios.

O currículo oculto, não ensinado, escondido, é aquele que não pertence ao currículo oficial.

> “Dir-se-á que existe um currículo oculto quando os autores dos manuais fazem a sua interpretação do programa, quando os professores moldam os conteúdos e organizam as situações de ensino – aprendizagem, quando os alunos são sujeitos ativos na interação didática, enfim, quando os pais e outros mais participam, de modo direto ou indireto, no desenvolvimento do currículo” (Pacheco, 2001, p. 70).

O autor apresenta os contextos ou níveis de decisão curricular da seguinte forma: “político-administrativo (no âmbito da administração central); de gestão (no âmbito da escola e da administração regional); de realização (no âmbito da sala de aula)” (Pacheco, 2001, p. 68). Relativamente a este último, é particularmente interessante a visão do papel dos manuais escolares enquanto mediadores do currículo para os professores.

Deste modo, para compreender o currículo é preciso ter em conta os diversos sistemas que o configuram. Olhar apenas para uma vertente leva facilmente a conclusões erradas. Cada contexto e, talvez mais importante, cada grupo de atores, tem a sua versão do currículo. Por exemplo, olhar para o currículo na sua vertente teórica e prescritiva, emanada do contexto político-administrativo, deixa de fora a realidade da prática escolar, isto é, o que acontece efetivamente no terreno: o político pretende prescrever mudanças da prática, mas o professor é quem concretiza o currículo na sala de aula e, só por isso, já aí lhe imprime a sua interpretação.

O quadro 1 cruza os diversos níveis de currículo propostos por Gimeno com os três contextos de decisão curricular salientados por Pacheco, evidenciando o protagonismo do manual escolar no currículo.

Quadro 1 - Níveis de currículo e os protagonistas curriculares (Canavarro, 2003)

Níveis de currículo	Contexto politico-administrativo (administração central)	Contexto de gestão (administração regional e escolar)	Contexto de realização (sala de aula)
Currículo prescrito	Especialistas		
Currículo apresentado	Autores de materiais e manuais		
Currículo moldado		Grupos de professores	Professor
Currículo em acção			Professor, alunos
Currículo avaliado	Sistema Educativo	Escola, Grupos de professores	Professor

As primeiras definições de currículo apontam para um conceito que corresponde "a um plano de estudos, ou a um programa, muito estruturado e organizado na base de objetivos, conteúdos e atividades e de acordo com a natureza das disciplinas" (Pacheco, 2001, p.16), o que demonstra uma noção restrita de currículo, mas ainda recorrente nas conceções de muitos docentes.

O currículo do passado considerava que o conhecimento se transmitia e se adquiria através de formas isoladas e especializadas das disciplinas, menosprezava o possível impacto das mudanças políticas e económicas e as desigualdades de acesso que diferenciavam os estudantes. O currículo atual é o conjunto de saberes cuja apropriação, num dado tempo e contexto, é socialmente reconhecida como necessária (Gaspar e Roldão, 2007).

Segundo Roldão (2008), o currículo escolar só tem razão de ser se com ele se pretendem desenvolver novas competências nos estudantes. Não podemos mais entender o currículo como apenas um conjunto de conteúdos a que correspondem um conjunto de conhecimentos inertes que se esquecem.

Quando nos referimos a competências, estamos a seguir a ideia de Perrenoud (1995), ou seja, a conceber o saber na sua relação com a capacidade efetiva de utilização e manejo – intelectual, verbal ou prático – e não a conteúdos acumulados que pouca influência têm para o agir no concreto, ou resolver qualquer situação diferente da que foi ensinada. Ou seja, estamos a conceber a competência não apenas na dimensão cognitiva mas também na dimensão social.

A socialização na profissão de professor, iniciada ainda como estudante que assiste ao desempenho dos seus professores, faz-se na base do programa e dos manuais a que recorrem, como única face visível do currículo. Como nos diz Roldão (2008), esta situação é impensável em qualquer outra profissão. Ainda segundo a mesma autora:

> "Um programa não se cumpre, o que tem de se cumprir é o currículo, a aprendizagem para cuja consecução ele foi organizado. (…) Cada docente vai fazer a gestão desse mesmo currículo, repensando o programa no sentido da sua funcionalidade e uso inteligente e não do caráter prescritivo estrito que, perversamente, serve também de justificação recorrente a tudo o que corre menos bem na ação docente" (Roldão, 2008, p. 29).

Assim, o trabalho que cabe à escola é garantir que se aprenda aquilo de que se vai precisar, pessoal e socialmente, para uma boa integração social. Young (2010) adverte para se considerar no desenvolvimento curricular a preocupação com "o que ensinar" em diversos contextos. Essa perspetiva remete às reflexões acerca das práticas curriculares como processos de diversificação curricular. Utilizamos, neste caso, o conceito de diversificação curricular para designar formas organizacionais de ofertas educativas, a que correspondem, por exemplo, tipos diferentes de cursos de ensino e modalidades de formação. A opção dos estudantes por cursos orientados para o prosseguimento de estudos (e dentro destes os seus ramos de especialização) e por cursos profissionais é uma forma de diversificação curricular.

Ainda segundo Young (2010), há um conjunto de dimensões chave na base de variações na forma de organização do conhecimento no currículo – entre o isolamento de disciplinas e matérias e a sua conectividade; entre o isolamento do conhecimento teórico relativamente ao do quotidiano ou senso comum e a sua integração; entre a assunção de que o conhecimento forma um todo coerente no qual as práticas estão relacionadas de forma sistemática e a de que ele pode ser dividido em elementos separados e reagrupados pelos aprendentes e pelos professores em várias combinações diferentes.

Fazer com que alguém aprenda tem vindo a substituir a ideia de "dar matérias" predominantemente pela via da fala dos professores, apoiada num manual que rigidamente se segue (Roldão, 2011). " O currículo é plástico, socialmente transformável, evolutivo, na sua natureza, mas estável na sua finalização (…) é justamente a competência visada que constitui a meta a alcançar pelo currículo escolar" (Roldão, 2011, p. 33).

2.2.1 O currículo de Matemática do Ensino Secundário

A evolução da Matemática e as mudanças sociais levam, periodicamente, à elaboração de novos currículos. Têm mudado não apenas os conteúdos curriculares, mas também o que se entende por currículo de Matemática. Até à relativamente pouco tempo, um currículo era essencialmente uma listagem de temas a tratar pelo professor. Depois, os currículos começaram a conter objetivos, recomendações metodológicas e sugestões para a avaliação.

Na elaboração do currículo intervêm diversos fatores, uns de modo explícito, outros apenas implicitamente. Um fator essencial é, naturalmente, a própria Matemática. Não apenas a Matemática académica mas deve ter também em conta a Matemática usada por outras ciências e ramos de atividade humana, incluindo a vida diária e o trabalho das pessoas.

Segundo a brochura da Didática (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997), na construção do currículo tem-se tirado partido da investigação em educação, nomeadamente à que se refere ao conhecimento e pensamento do professor e à dinâmica do funcionamento da instituição escolar. Os conhecimentos, interesses, capacidades e valores dos professores de Matemática têm de ser tidos em conta na elaboração do currículo desta disciplina. A prática e, principalmente, a reflexão sobre a prática, é uma grande fonte de sabedoria, dando a conhecer o modo de reagir dos estudantes aos diferentes tipos de propostas e modos de trabalho.

Por último, é preciso considerar o impacto do contexto social no processo de elaboração dos currículos. Em cada época, há forças sociais e valores que se afirmam como importantes e que influenciam, de modo mais ou menos direto, os currículos. As pressões do Ensino Superior, que pretende que os estudantes que recebe tenham uma certa preparação, têm sido, tradicionalmente, um fator com muita influência no currículo.

Segundo o NCTM (2008, p. 15) " um currículo é mais do que um conjunto de atividades: deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo dos anos de escolaridade."

O Ensino Secundário, que é atualmente parte integrante da escolaridade obrigatória, está vocacionado para a especialização das diferentes áreas bem como das disciplinas do conhecimento e para a sua abordagem em maior ou menor grau de profundidade, de acordo com as diferentes vias que podem ser seguidas pelos alunos. Os estudantes dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Socioeconómicas, têm Matemática A, os alunos dos Cursos Gerais de Ciências Sociais e Humanas têm MACS e os estudantes de vários Cursos Tecnológicos têm Matemática B. Há ainda o programa (por módulos) dos alunos dos Cursos Profissionais de Nível Secundário.

Sendo o tema deste trabalho a análise de manuais escolares do 12.º ano de Matemática A, vamos focar a nossa atenção no programa que está na base da elaboração destes manuais.

Em setembro de 2003 entrou em vigor o atual programa de Matemática A para o Ensino Secundário. Este programa está de acordo com as novas orientações curriculares, que se afirmaram na década de 80 e 90 no panorama internacional, ao valorizar a natureza das competências matemáticas, que merecem especial atenção no processo de ensino--aprendizagem e ao ter em conta o impacto das novas tecnologias computacionais na Matemática e na sociedade em geral.

O programa contempla finalidades, objetivos e competências gerais da disciplina no Ensino Secundário. A subdivisão dos objetivos e competências gerais em *Valores/Atitudes*, *Capacidades/Aptidões* e *Conhecimentos* é uma caraterística fundamental do programa de Matemática do Ensino Secundário (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca e Lopes, 2001, p. 5).

No domínio dos *Valores/Atitudes* o estudante deve desenvolver: a confiança em si próprio; interesses culturais; hábitos de trabalho e persistência; o sentido da responsabilidade; o espírito de tolerância e de cooperação.

Relativamente às *Capacidades/Aptidões* o estudante deve desenvolver: a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; a capacidade de comunicar; o raciocínio e o pensamento científico.

No que se refere aos *Conhecimentos* o estudante deve: ampliar o conceito de número; ampliar conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço; iniciar o estudo da Análise Infinitesimal; ampliar conhecimentos de Estatística e Probabilidades e conhecer aspetos da História da Matemática.

O programa de Matemática A refere, que em cada tema deve haver um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões.

Este programa está organizado por grandes temas (quadro 2) que foram escolhidos, segundo Silva et al. (2001), de tal modo que: i) sejam contempladas competências fundamentais que a aprendizagem Matemática pode favorecer; ii) estejam ligados a necessidades reais e forneçam instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível imediata; e iii) sejam motor de compreensão da Matemática como um todo em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de outros. É recomendado que cada assunto, embora desenvolvido mais detalhadamente dentro da lecionação de um tema, seja assunto interessante e útil na abordagem dos diversos temas.

Quadro 2 - Distribuição dos temas do programa de Matemática A em cada ano

10.º ano	11.º ano	12.º ano
Tema I Geometria no Plano e no Espaço I.	Tema I Geometria no Plano e no Espaço II.	Tema I Probabilidades e Combinatória.
Tema II Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.	Tema II Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.	Tema II Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações.
Tema III Estatística.	Tema III Sucessões reais.	Tema III Trigonometria. Números complexos.
Temas Transversais • Comunicação Matemática • Aplicações e Modelação Matemática • História da Matemática • Lógica e Raciocínio Matemático • Resolução de Problemas e Atividades Investigativas • Tecnologia e Matemática		

O programa apresenta uma preocupação de equilíbrio entre conteúdos clássicos e metodologias de trabalho, tornando claro que os aspetos metodológicos como "Comunicação Matemática", "Aplicações e Modelação Matemática", "História da Matemática", "Lógica e Raciocínio Matemático", "Resolução de Problemas e Atividades

Investigativas", "Tecnologia e Matemática" são elementos intrínsecos e incontornáveis do programa; nesse sentido o programa chama-lhes "Temas transversais".

Fazendo uma análise do programa podemos verificar que, para além de uma listagem de conteúdos a lecionar, apresenta também propostas metodológicas e sugere recursos, quer materiais, quer bibliográficos, para apoio ao planeamento de todo o processo de ensino e de aprendizagem da disciplina. No programa de Matemática A, refere-se, expressamente, que

> "tendo como pressuposto ser o estudante agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que: (1) os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas; (2) os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização; e (3) se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural" (Silva et al., 2001, p. 10).

Verifica-se, na proposta de abordagem dos conteúdos que, por um lado, está presente o princípio do ensino em espiral (Cabrita, 1996), por outro, a proposta de um ensino por descoberta, com o estudante a ter uma parte ativa na sua aprendizagem.

Em todos os temas do programa de Matemática (Geometria, Funções e Estatística) se podem encontrar ferramentas fundamentais de modelação. O papel da Matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável: um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar situações do domínio da Matemática, da Física, da Economia, da Geometria Descritiva,... (Silva et al., 2001).

Esta ideia de que cada conceito não deve ser visto isoladamente, mas em conexão com outros, dentro da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento, tem vindo a ser defendida por diversos autores. Já em 1975, Sebastião e Silva referia:

> "A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros

> domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos" (p. 12).

Neste contexto, o programa destaca a importância das tarefas a selecionar, as quais deverão contribuir para o "desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e cooperação" (Silva et al., 2001, p. 10).

Sugere que sejam propostos não apenas trabalhos individuais, mas também trabalhos de grupo, trabalhos de projeto e atividades investigativas. É recomendado que se parta, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o estudante aceda gradualmente à formalização dos conceitos. O programa identifica situações, nomeadamente nas funções exponenciais e logarítmicas, para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática.

Relativamente ao raciocínio dedutivo, o programa refere que o estudante deverá "ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (Silva et al., 2001, p 11).

Podemos também encontrar no programa referências à integração obrigatória de tecnologias nas práticas pedagógicas. A tecnologia, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem. A representação visual confere dinamismo, à exploração de diversas tarefas, permitindo aos estudantes a construção intuitiva e gradual de um conceito matemático até à sua formalização.

Segundo Silva et al. (2001, p. 22), "a dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático" justificando-se o seu uso pelas oportunidades que estas podem proporcionar. O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, em particular, o programa recomenda a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

Contudo, o programa salienta a importância de se proporcionar neste tipo de práticas pedagógicas, que integram tecnologias, um espaço para o confronto com resultados teóricos procurando, desta forma, evitar potenciais conflitos cognitivos no estudante, durante a aprendizagem de determinado conceito matemático. Os autores sustentam que só é possível atingir os objetivos e competências gerais do programa recorrendo "à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada" (Silva et al., 2001, p.15).

No programa podem encontrar-se referências relativas à avaliação das aprendizagens, nomeadamente, pretende-se que "a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem" (Silva et al., 2001, p. 13).

Recomenda que sejam propostas ao estudante, um conjunto de tarefas de extensão e estilo variáveis, algumas individuais e outras em grupo, de modo que, no conjunto, reflitam equilibradamente as finalidades do currículo. Só assim se contribuirá para promover outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no Ensino Secundário.

O currículo de Matemática atual continuará em vigor no próximo ano letivo, porém, já foi anunciado pelo Ministério da Educação e da Ciência, que vai ser alterado a partir de 2015/2016.

Com efeito, em janeiro de 2010 teve início o Projeto das Metas curriculares que integra a Estratégia para o Desenvolvimento de um Currículo Nacional do Ensino Básico e Secundário. O projeto visa promover um percurso de coerência, clarificação e operacionalidade dos documentos curriculares que orientam, no plano nacional, as linhas de ação que as escolas e os professores devem desenvolver no quadro da sua autonomia e face às diversidades dos seus contextos específicos. Visa nomeadamente operacionalizar, em termos de resultados de aprendizagem esperados, as competências que devem resultar, para cada ciclo e área ou disciplina, do conhecimento sólido dos respetivos conteúdos, conceitos estruturantes e processos de uso e construção desses conhecimentos. As Metas de Aprendizagem pretendem ser um instrumento de gestão curricular de apoio ao trabalho dos professores, ao explicitarem os resultados da aprendizagem, que os estudantes devem demonstrar no final de um percurso curricular.

A este respeito o Ministério da Educação e Ciência, no despacho n.º 15971/2012 de 14 de dezembro, salienta

> "As Metas Curriculares identificam a aprendizagem essencial a realizar pelos alunos em cada disciplina, por ano de escolaridade ou, quando isso se justifique, por ciclo, realçando o que dos programas deve ser objeto primordial de ensino (...) identificam os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades que se querem ver desenvolvidas, respeitando a ordem de progressão da sua aquisição. São meio privilegiado de apoio à planificação e à organização do ensino, incluindo a produção de materiais didáticos, e constituem-se como referencial para a avaliação interna e externa, com especial relevância para as provas finais de ciclo e exames nacionais."

Refira-se que as Metas de Aprendizagem começam a ser aplicadas à disciplina de Matemática, com caráter obrigatório no Ensino Básico, já a partir do próximo ano letivo.

As Metas de Aprendizagem para o Ensino Secundário ainda não foram divulgadas. Sabe-se apenas que serão obrigatórias no 10.º ano, para a disciplina de Matemática A, em 2015/2016. No ano letivo seguinte, serão obrigatórias no 11.º ano e em 2017/2018 para o 12.º ano.

2.2.2 Orientações curriculares para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas

As funções são uma poderosa ferramenta para representar e interpretar situações, tanto da realidade como da própria Matemática, que envolvam relações entre variáveis. Caraça (1951, p. 112) refere que "uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais" e indica que o conceito de função surge como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas que dão significado à realidade.

A valorização atribuída às funções, no programa de Matemática A do Ensino Secundário, pode ser considerado significativo, pois, aproximadamente 50% das aulas previstas são destinadas ao estudo deste tema. Porém, como a conexão das funções com os temas da Geometria, das Probabilidades e da Estatística é também um dos pontos importantes a relevar neste programa, o seu peso assume proporções ainda maiores.

Na análise das orientações curriculares para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, tivemos em conta, para além das diretrizes do programa no que diz respeito ao tema “Introdução ao Cálculo Diferencial II”, aspetos relacionados com os temas transversais do programa de Matemática A do Ensino Secundário, as brochuras de apoio ao programa e as orientações defendidas pelo National Council of Teachers of Mathematics na obra NCTM (2008). Este último documento serve de referência, orientação e recurso, para todos aqueles cujas decisões afetam a educação Matemática dos estudantes até ao 12.º ano, em particular, para os responsáveis pela elaboração dos currículos e manuais escolares (Leitão e Cangueiro, sd).

Para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, o programa de Matemática A do 12.º ano (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca e Lopes, 2002), apresenta como pré-requisitos as Funções e Gráficos do 10.º ano e a Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11.º ano. No 12.º ano são estudados de forma mais rigorosa conceitos, como o de limite, já utilizados antes de forma intuitiva. O estudo das funções é ampliado com as funções exponencial e logarítmica.

Segundo a brochura das funções do 12.º ano (Teixeira, Precato, Albuquerque, Nunes e Nápoles, 1999), as orientações metodológicas para as funções do 12.º ano são as mesmas dos anos anteriores: análise de situações da vida real, relevância do raciocínio dedutivo e da comunicação, formas de trabalho e de avaliação diversificadas, utilização obrigatória da calculadora, utilização do computador, etc.

Seguindo a mesma linha de orientação, nas normas relativas ao estudo da Álgebra, em relação às funções, o NCTM (2008) refere que os estudantes do Ensino Secundário deverão complementar as experiências vividas nos níveis de aprendizagem anteriores com situações que lhes proporcionem oportunidades para:

- compreender e analisar funções com maior aprofundamento do que nos anos anteriores e ser capaz de os representar através de tabelas, gráficos e símbolos;
- compor funções e determinar a função inversa de uma função;
- compreender e comparar as propriedades das classes de funções como as exponenciais e as logarítmicas;
- compreender as propriedades algébricas, que justificam a manipulação dos símbolos, nas expressões, equações e inequações, adquirir destreza na execução dessas manipulações, quer seja mentalmente, quer seja com papel e lápis ou com tecnologia;
- modelar e analisar diversos fenómenos do mundo real que proporcionam aos estudantes meios eficazes de dar sentido aos conceitos matemáticos subjacentes.

O programa de Matemática A do 12.º ano (Silva et al., 2002) distingue, no âmbito dos conteúdos das funções exponenciais e logarítmicas, quatro subtemas: (i) função exponencial de base superior a um, crescimento exponencial, estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x)=a^x$ com $a>1$; (ii) função logarítmica de base superior a um, estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x)=\log_a x$ com $a>1$; (iii) regras operatórias de exponenciais e logaritmos; e (iv) utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

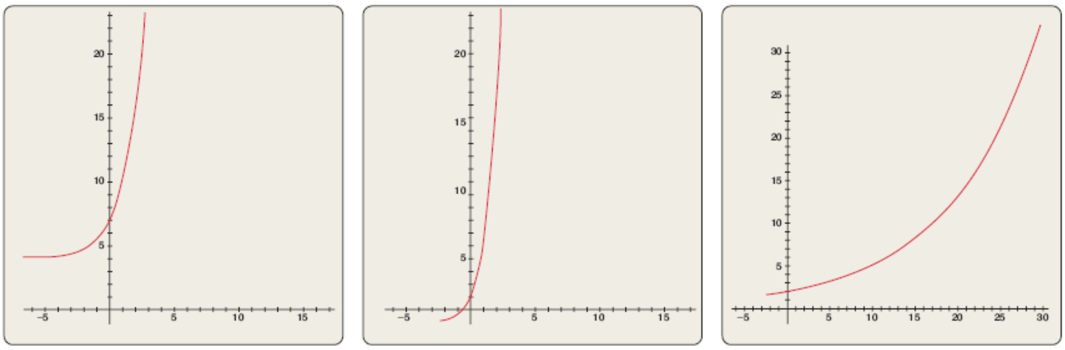
O quadro 3 (Silva et al., 2002, p. 4) mostra o âmbito dos conteúdos das funções exponenciais e logarítmicas, bem como as indicações metodológicas específicas para este tipo de funções, do programa de Matemática A do 12.º ano atualmente em vigor.

Quadro 3 - Conteúdos e sugestões metodológicas do programa para as funções exponenciais e logarítmicas

Funções exponenciais e logarítmicas	**Indicações Metodológicas**
Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x)=a^x$ com $a>1$.	Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes).
Funções logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x)=\log_a x$ com $a>1$.	É fundamental apresentar aos estudantes atividades diversificadas (ver, por exemplo, brochura de apoio ao programa sobre este tema) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações.
Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.	Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.
Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.	A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.

O referido programa salienta que vários conceitos do tópico das funções exponenciais e logarítmicas são importantes noutras disciplinas como Física, Química, Economia e Geografia. Por isso, é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de atividades comuns ou a lecionação de algum aspeto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores. Esta recomendação vai ao encontro da norma do NCTM para as conexões no Ensino da Matemática, quando refere que os estudantes devem "reconhecer e aplicar matemática em contextos exteriores a ela própria" (NCTM, 2008, p. 416).

As orientações metodológicas do programa de Matemática A referem que as funções exponenciais e logarítmicas devem permitir ao estudante obter uma maior compreensão da Matemática e suas aplicações à vida real ou outras áreas das ciências, assim como, relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos. Esta recomendação vai ao encontro das orientações que emergem do NCTM, ao referir que quando os estudantes conseguem reconhecer e criar "conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura" (NCTM, 2008, p. 71) e sugere, como exemplo, uma situação que diz respeito à família de funções exponenciais do tipo $f(x) = a \times b^x + c$, com $a > 0$ e $b > 1$, ilustradas na figura 2, que partilham determinadas propriedades.



$g(x) = 3 \cdot 2^x + 4$ $h(x) = 2 \cdot 3^x - 1$ $k(x) = 2 \cdot 1{,}1^x$

Figura 2 - Gráficos de funções exponenciais do tipo $f(x) = a \times b^x + c$

Os estudantes podem observar e descrever as características das funções, da figura, através das respostas a questões do tipo, "O que é que acontece a cada uma destas funções para valores de x positivos e elevados? E para valores de x muito negativos? Onde é que intersetam o eixo dos yy?". Os estudantes podem dizer que os valores de cada função aumentam rapidamente para valores positivos e elevados de x e que a interseção do eixo dos yy pode ocorrer, em cada gráfico, em $a + c$. Nos casos em que $a < 0$ e $0 < b < 1$, poderão descobrir que a mudança de sinal de a, irá provocar a reflexão do gráfico ao longo de uma linha horizontal e que a alteração de b para $1/b$ irá provocar uma reflexão do gráfico relativamente ao eixo dos *yy*, mantendo os gráficos a mesma forma. Este tipo de investigação deverá ajudar os estudantes a compreender que todas as funções do tipo $f(x) = a \times b^x + c$ partilham de determinadas propriedades. Através do trabalho analítico e exploratório, os estudantes podem compreender as propriedades destas e de outras classes de funções, como as logarítmicas.

De referir, que o programa de Matemática A do 12.º ano alerta para a necessidade de os estudantes compreenderem e utilizarem procedimentos algébricos, a par da utilização da calculadora, "sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos" (Silva et al., 2002, p. 4). Também o NCTM refere que os estudantes

> "deverão tornar-se hábeis na execução dessas manipulações, recorrendo aos meios apropriados - mentalmente, com papel e lápis ou com tecnologia -, para resolverem equações e inequações, para gerarem formas equivalentes de expressões ou funções, ou para provarem resultados gerais" (NCTM, 2008, p.353).

A destreza com o simbolismo algébrico auxilia os estudantes a representar e resolver problemas em diversas áreas do currículo. Deverão ser capazes de operar sobre expressões algébricas com destreza, de as combinar e converter em formas alternativas. O NCTM (2008) refere, por exemplo, que determinar e compreender o significado da solução de uma equação como $e^{4x} = 4e^{2x} + 3$, requer a compreensão de que a equação pode ser escrita sob a forma de equação quadrática, por meio da mudança de variável $u = e^{2x}$. Equações como esta merecem uma atenção especial e cuidadosa, pois uma das raízes da quadrática é negativa. Quer resolvam as equações mentalmente, com papel e lápis ou utilizando as novas tecnologias, os estudantes deverão desenvolver à vontade com símbolos, de modo a torná-los capazes de representar situações simbolicamente, escolher métodos de resolução adequados e avaliar a plausibilidade dos resultados.

As sugestões metodológicas do programa, para as funções exponenciais e logarítmicas, referem que é fundamental apresentar aos estudantes tarefas diversificadas (e sugere as da brochura de apoio ao programa sobre este tema). Recomenda, em particular, as tarefas de exploração com recurso às novas tecnologias, as quais podem "permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações" (Silva et al., 2002, p.4).

O programa de Matemática A prevê, como tema transversal, "Aplicações e Modelação Matemática" referindo que "deve ser discutido com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo atual" (Silva, et al., 2001, p. 20). A brochura de apoio ao programa (Teixeira, et al., 1999) dá especial ênfase ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, num contexto de aplicações variadas e sugere, como exemplo e forma de exploração a seguinte situação:

> A tabela abaixo apresenta os dados relativos à população portuguesa residente no continente, no período de 1854 a 1991, de acordo com os censos respetivos.

Anos	1854	1864	1878	1890	1900	1911	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1981	1991
População (milhões)	3,499	3,927	4,303	4,713	5,039	5,586	5,668	6,34	7,219	7,921	8,293	8,075	9,337	9,363

Tabela 1 – Dados relativos à população portuguesa no período de 1854 a 1991

1. Representa graficamente os dados e analisa a evolução da população ao longo deste período de tempo. A população cresceu sempre da mesma forma? Consegues identificar algum período em que se destaque um crescimento diferente do esperado? Porque terá sido?

2. Como sabes as funções exponenciais são usadas frequentemente para descrever a evolução de populações. Considera como modelos teóricos o modelo exponencial: $P(t) = P_0 . e^{at}$ em que P_0 é a população no instante 0 ou seja em 1854, e o modelo logístico:

$P(t) = \dfrac{b}{1+ae^{-kt}}$ em que $\dfrac{b}{1+a}$ é a população no instante 0 e b a capacidade máxima do sistema ou seja, neste caso, a população máxima admissível para o território do continente. Tenta encontrar valores para os parâmetros, de modo que as funções descrevam de forma aceitável, a evolução da população no período de tempo considerado.

3. Qual é o ponto de interseção das duas curvas?

4. Experimenta também os modelos de regressão que a calculadora tem à tua disposição.

5. Qual a população portuguesa residente no continente, segundo cada um dos modelos, no ano 2000? 2010? 2100?

6. O que pensas dos modelos? Qual te parece mais adequado para fazer estas previsões?

Uma das orientações metodológicas do programa de Matemática A do 12.º ano (Siva et al., 2002) é que a modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita quer usando a regressão estatística da calculadora gráfica, a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados, quer por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor. Salienta, no entanto, que o tema transversal "Aplicações e Modelação Matemática" não se deve resumir a enunciados e resolução de problemas realistas que usam conhecimentos de diversas ciências (Silva et al., 2001).

A modelação envolve a identificação e a seleção das principais caraterísticas de uma situação real, a representação simbólica dessas caraterísticas, a análise e o raciocínio sobre o modelo, a ponderação da precisão e das limitações do modelo. Também o NCTM (2008) refere que os estudantes deverão estudar a modelação com maior profundidade, gerando ou utilizando dados e investigando quais os tipos de funções que melhor traduzem ou modelam esses dados. Além disso, salienta que o facto de serem os próprios estudantes a gerar os dados, contribui para estimular o interesse pela criação de modelos matemáticos.

Devido à utilização generalizada da calculadora e das tecnologias informáticas para a recolha e apresentação dos dados, os estudantes deverão compreender que a seleção da escala e da janela de visualização tornam-se decisões importantes. As escalas não lineares ajudam a representar alguns fenómenos naturais. O NCTM (2008) refere, por exemplo, que o ouvido humano possui a capacidade de diferenciar sons de baixa intensidade bastante próximos entre si, mas não consegue distinguir tão bem diferentes sons de alta intensidade. Consequentemente, as medições da intensidade do som são geralmente apresentadas numa escala logarítmica, associada a unidades constantes de decibél, como se ilustra na tabela 2 (as unidades são newton por metro quadrado). Os estudantes deverão ser capazes de comparar, por exemplo, a altura do som de um sussurro (20 decibéis) com a de um aspirador (80 decibéis), observando que, por cada aumento de dez decibéis, a intensidade do som aumenta segundo um fator de 10.

			Sussurro quase audível						Ouvir um aspirador			Ouvir um Walkman			Ouvir ao perto motores de um jacto
Decibéis	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Intensidade do som em newton por m^2	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{9}

Tabela 2 - Tabela que ilustra que a escala de decibéis é logarítmica

O tema transversal do programa do Ensino Secundário "Tecnologia e Matemática" recomenda, para além da calculadora gráfica obrigatória, a utilização dos sensores para recolha de dados e computadores com sofware adequado (programas de Cálculo Numérico, Gráficos e simulações, Álgebra Computacional…). O estudante deverá registar por escrito as propriedades constatadas quando recorre à tecnologia, "justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim, tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática)" (Siva et al., 2001, p. 22). Também o NCTM (2008, p. 353) dá ênfase ao aprofundamento de experiências anteriores apoiadas por "ferramentas tecnológicas para representar e estudar o comportamento de funções", além disso, " as possibilidades de envolver os alunos em desafios matemáticos aumentam de forma acentuada, com a utilização de tecnologias especiais" (NCTM, 2008, p. 27).

As sugestões emanadas do referido programa para o tema transversal "Lógica e raciocínio", afirmam que o estudante do Ensino Secundário deverá "ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (Silva et al., 2001, p 11). Também as orientações emanadas do NCTM procuram habilitar os estudantes para formular conjeturas matemáticas, desenvolvendo e avaliando argumentos e provas, reconhecendo "o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da matemática" (NCTM, 2008, p. 404). A brochura de apoio ao programa sugere que os estudantes deste nível de ensino provem, por exemplo, a afirmação:

> "Se os valores de uma variável x crescerem em progressão geométrica de razão $r > 0$, com o primeiro termo $u_1 > 0$, os logaritmos de x, em qualquer base, crescerão em progressão aritmética" (Teixeira et al., 1999, p. 119).

As orientações do programa de Matemática A do Ensino Secundário para o tema transversal "História da Matemática" indicam que, a referência à evolução de conceitos matemáticos de função exponencial, logaritmo e função logarítmica, ajudará os estudantes a apreciar o contributo da Matemática para resolução de problemas através dos tempos. A brochura de apoio ao programa (Teixeira et al., 1999, p. 60) sugere a "função logarítmica" e a "régua de cálculo", como exemplos interessantes a serem apresentados aos estudantes ou propostos como atividades de investigação.

Segundo a referida brochura, o estudo das funções deve continuar a ser feito a partir de abordagens gráficas e numéricas, relacionando de forma sistemática os aspetos gráficos, numéricos e analíticos. Este estudo deve ter por base contextos de resolução de problemas e de aplicações da Matemática. Também o NCTM (2008) refere que as experiências algébricas permitem aos estudantes criar e utilizar representações tabelares, simbólicas, gráficas e verbais para melhor analisarem e compreenderem as funções exponenciais e logarítmicas.

Segundo Friedland e Tabach (2001) existem quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática e em particular, da Álgebra - representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. O uso de diferentes representações torna o processo de aprendizagem da Álgebra e em particular o das funções, significativo e efetivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação.

A **representação verbal** está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.

A **representação numérica** é uma representação natural no início do estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, apresenta como limitação, em alguns casos, o facto de não ser generalizável.

A **representação gráfica** proporciona uma imagem clara de uma função de variável real, sendo intuitiva e apelativa para os estudantes que gostam de uma análise visual. No entanto, é muito influenciada por fatores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema.

A **representação algébrica** é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efetuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Para além destas quatro formas de representação, Brown e Mehilos (2010), referem que as tabelas são outra forma de representação que estabelece a ponte entre a Aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, e a Álgebra, onde as quantidades variam e são abstratas. As tabelas dão aos estudantes uma experiência tangível, em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado.

No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010), alguns estudantes desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo esta forma de representação um suporte para usar enquanto procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas.

A importância de trabalhar com várias representações decorre, das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação, sendo as desvantagens de umas colmatadas pela combinação com outras e, também da necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos estudantes. Segundo Kaput (1992), são considerados como fatores que influenciam a utilização de determinado tipo de representação: a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação.

As orientações que emergem do NCTM (2008) referem, que as situações devem ser exploradas usando múltiplas formas de representação e sugere, como exemplo, as situações da figura 3, que podem ser modeladas por funções de classes distintas.

Situação 1: Em Fevereiro de 2000, o custo do envio de uma carta em correio azul era de 33 cêntimos para os primeiros 30 g, acrescido de 22 cêntimos por cada 30 g adicionais, até ao peso máximo de 390 g.

Peso em gramas	30	60	90	120	150	...	P
Custo em cêntimos	33	33 + 22	33 + 2(22)	33 + 3(22)	33 + 4(22)	...	33 + (P/30 − 1)(22)

Situação 2: Durante 1999, a população mundial atingiu os 6 milhares de milhão. Prevê-se que a taxa média de crescimento da população seja 2% ano ano.

Figura 3 - Duas situações que podem ser modeladas por funções de classes distintas

Na primeira situação, os estudantes poderão começar por construir uma tabela de valores e constatar que a taxa de variação é de 22 cêntimos por cada 30 g. Os estudantes deverão compreender que o gráfico do custo postal em função do peso representa uma função em escada.

Na segunda situação, os estudantes poderão começar por produzir uma definição recursiva da função, usando a população de um determinado ano para determinarem a população do ano seguinte. Deverão, também, ser capazes de reconhecer que esta situação pode ser representada explicitamente por meio da função exponencial $f(n) = 6(1{,}02)^n$, em que $f(n)$ é a população em milhares de milhão e n o número de anos a partir de 1999. Discutir se é provável que esta fórmula constitua sempre um modelo adequado poderá ajudar os estudantes a compreender as limitações dos modelos matemáticos.

Inicialmente, uma tabela poderá ser a forma mais conveniente de representar o custo postal no primeiro exemplo. Contudo, apesar da conveniência de se poder "ler" diretamente um valor, a tabela poderá obscurecer a regularidade do fenómeno. A regularidade torna-se visível quando a função é representada graficamente. Do mesmo modo, embora inicialmente os estudantes possam construir uma tabela quando confrontados com a segunda situação, as representações gráficas e simbólicas da função exponencial poderão contribuir para uma maior compreensão da natureza do crescimento exponencial.

Os quatro sistemas de representação de funções: verbal, numérico, gráfico e algébrico têm vantagens e desvantagens e fornecem mais um ou outro tipo de informação do que as restantes. Assim, o estudante deverá analisar as várias formas de representação, retirar informação de cada uma delas e relacioná-las.

2.2.3 Competências matemáticas

De acordo com Santo (2006, p. 107), a finalidade do manual escolar é "desenvolver competências do estudante e não a simples transmissão de conhecimentos".

Para Perrenoud (2001), uma competência está relacionada com o processo de mobilizar recursos (conhecimentos, capacidades, estratégias de resolução), em diversos contextos, cenários, e/ou situações problemáticas. Roldão (2003, p. 20), seguindo a mesma linha de pensamento de Perrenoud, sobre o conceito de competência, afirma que:

> "existe competência (ou competências) quando, perante uma situação, se é capaz de mobilizar adequadamente diversos conhecimentos prévios, selecioná--los e integrá-los adequadamente perante aquela situação (ou problema, ou questão, ou objeto cognitivo ou estético, etc.)."

Uma vez que se pretende que os estudantes desenvolvam uma elevada literacia[4] matemática e que sejam capazes de exercer uma cidadania crítica e participativa, torna-se importante que desenvolvam capacidades e competências, tais como sentido crítico, persistência nas tarefas, autonomia, sentido de responsabilidade, capacidade de formular e testar conjeturas ou de elaborar uma argumentação consistente e sustentada. Desta forma, a Escola, em geral, e o manual escolar, em particular, enquanto recurso didático, com mais poder no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem, devem propor espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004).

---

[4]A literacia matemática inclui um conjunto de capacidades matemáticas específicas que têm a ver com processos mentais ou físicos, atividades e comportamentos específicos que o sujeito executa quando se envolve na realização de uma tarefa que apresenta desafios matemáticos, como, por exemplo, resolução de problemas puros ou aplicados, leitura de um texto matemático, escrever um texto com componentes matemáticas ou demonstrar um teorema (Niss, 2003).

A necessidade de insistir no desenvolvimento de competências está a ser realçada de forma muito visível pelo programa de avaliação internacional PISA[5], promovido pela OCDE que envolve estudantes até aos 15 anos. Do Ensino Secundário participam estudantes do 10.º e 11.º anos. Apresenta-se, de seguida, a categorização de competências que estão na base do quadro conceptual do PISA.

No projeto KOM, Niss (2011) identifica oito competências matemáticas, que se devem desenvolver nos estudantes dos diferentes níveis do sistema de ensino e que usaremos como referência. Estas competências formam dois grupos (i) a capacidade de colocar e responder a questões em e com a Matemática e (ii) a capacidade de lidar com a linguagem e ferramentas matemáticas. De seguida, descrevem-se, sucintamente, as quatro competências que fazem parte de cada um dos grupos.

A capacidade de colocar e responder a questões em e com a Matemática, inclui as competências:

1. Pensamento matemático - dominar formas de pensamento matemático, inclui:

- compreender e saber lidar com a abrangência e as limitações de um determinado conceito;
- abstrair conceitos, generalizando resultados;
- distinguir entre diferentes tipos de afirmações matemáticas, por exemplo, definições, teoremas, conjeturas e casos especiais;
- possuir conhecimento dos tipos de perguntas que são típicas da Matemática e conhecer o tipo de respostas que a Matemática pode oferecer;
- ter a capacidade de colocar tais questões.

[5]PISA - Programme for International Student Assessment. O estudo PISA foi lançado pela OCDE (Organização para o Desenvolvimento e Cooperação Económico), em 1997. Os resultados obtidos nesse estudo permitem monitorizar, de uma forma regular, os sistemas educativos em termos do desempenho dos alunos, no contexto de um enquadramento conceptual aceite internacionalmente.

2. Resolução de problemas – ser capaz de colocar e resolver problemas matemáticos, inclui:

- identificar, formular, e definir diferentes tipos de problemas, da Matemática pura ou aplicada, problemas abertos ou fechados;
- possuir a capacidade de resolver problemas, formulados por outros ou por si mesmo, utilizando diferentes estratégias, se for adequado.

3. Modelação – ser capaz de analisar e construir modelos matemáticos de outras áreas, inclui:

- analisar os fundamentos e as propriedades dos modelos existentes, incluindo a avaliação da sua abrangência e validade;
- construir um modelo num determinado contexto, ou seja, estruturar a situação a modelar, matematizá-la, trabalhar com o modelo resultante; retirar conclusões; validar o modelo; analisar criticamente o modelo quanto à sua utilidade e relevância; comunicar sobre o modelo; monitorizar e controlar todo o processo de modelação.

4. Raciocínio matemático – ser capaz de raciocinar matematicamente, inclui:

- seguir e avaliar o raciocínio matemático de outros;
- saber o que é uma prova matemática (e o que não é) e como ela difere de outros tipos de raciocínio matemático;
- compreender a lógica que está subjacente a um contraexemplo;
- descobrir as ideias principais de uma prova;
- formular argumentos formais e informais, incluindo transformar argumentos heurísticos (baseados em intuições ou em casos particulares) em provas válidas.

As competências do segundo grupo focam-se na capacidade de lidar com a linguagem e ferramentas matemáticas. Niss identifica quatro competências, que a seguir descrevemos sucintamente.

5. Representação – ser capaz de utilizar várias representações de entidades matemáticas, inclui:

- compreender (descodificar, interpretar e distinguir) e utilizar os diferentes tipos de representações de entidades matemáticas;
- compreender as relações entre diferentes representações da mesma entidade;
- escolher entre diferentes tipos de representações e passar de uma forma para outra.

6. Simbolismo e formalismo – ser capaz de lidar com a linguagem simbólica e sistemas matemáticos formais, inclui:

- descodificar linguagem simbólica e formal;
- traduzir da linguagem simbólica para a linguagem natural e vice-versa;
- manipular e utilizar afirmações e expressões contendo símbolos e fórmulas;
- compreender a natureza dos sistemas matemáticos formais.

7. Comunicação – ser capaz de comunicar, dentro, com, e acerca da matemática, inclui:

- compreender, examinar e interpretar diferentes tipos de expressões matemáticas ou textos, escritos, visuais ou orais, por exemplo, quando os estudantes descodificam e interpretam textos do manual de matemática;
- expressar-se, de diferentes formas e níveis de precisão, sobre assuntos matemáticos, para diferentes tipos de audiência.

8. Instrumentos e recursos – ser capaz de utilizar instrumentos e recursos matemáticos, inclui:

- conhecer a existência e as propriedades, de vários recursos e instrumentos que podem apoiar a atividade matemática (por exemplo, réguas, compassos, transferidores, tabelas, ábacos, calculadoras, computadores, Internet);
- ter noção das possibilidades e limitações de tais instrumentos e recursos;
- ser capaz de usar de forma reflexiva ferramentas e recursos.

O quadro 4 apresenta as oito competências descritas, que formam dois grandes grupos.

Quadro 4 - Competências de Niss (2011)

Capacidade de colocar e responder a questões com e sobre a matemática
1. Pensamento matemático
2. Resolução de problemas
3. Modelação
4. Raciocínio matemático
Capacidade de lidar com a linguagem e ferramentas matemáticas
5. Representação
6. Simbolismo e formalismo
7. Comunicação
8. Instrumentos e recursos

Estas competências constituem-se como o elemento central, para o desenvolvimento de metodologias de ensino e aprendizagem, que facilitem e estimulem o desenvolvimento dos estudantes em Matemática. Assim, os manuais escolares devem proporcionar contextos de aprendizagem ricos e diversificados, que proporcionem a interpretação de enunciados subjacentes a tarefas gradativamente mais abertas e complexas, a descrição e a explicitação de procedimentos, estratégias e argumentações. Deste modo, constituem-se espaços privilegiados e facilitadores do desenvolvimento, designadamente, do gosto pela Matemática e do pensamento matemático a par de uma mais sólida construção de conhecimentos.

No programa de Matemática A do Ensino Secundário (Silva et al., 2001), encontramos "objetivos e competências gerais", organizados numa tabela de três colunas, que explicita (1) Valores/atitudes; (2) Capacidades/Aptidões; (3) Conhecimentos. É uma tabela que inclui o termo "competências" no seu título.

O manual escolar deve ser um recurso didático promotor do desenvolvimento de competências matemáticas.

2.2.4 Tarefas matemáticas

A investigação que vamos realizar nos manuais, inclui a análise das tarefas matemáticas propostas ao estudante para consolidação dos conhecimentos e desenvolvimento de competências. O manual deve propor tarefas ricas e diversificadas, para que o estudante tenha uma aprendizagem permanente e para que a possa aplicar posteriormente em novas situações. O estudante deverá experimentar diversos tipos de tarefas com grau de dificuldade crescente, a fim de as tarefas irem ao encontro do seu crescimento cognitivo.

Durante muito tempo insistiu-se em tarefas rotineiras, essencialmente na forma de exercícios; ultimamente, vários autores têm insistido na necessidade de avançar para outro tipo de tarefas mais ricas, tais como resolução de problemas, trabalhos de pesquisa, investigações, projetos e outros.

Os problemas são, segundo Polya (1973), uma grande oportunidade para o professor.

> “ Se preenche o tempo de que dispõe a exercitar os seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, aquela oportunidade. Mas se desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas adequados aos seus conhecimentos e ajudando-os com interpelações estimulantes, poderá despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem” (p. 11).

Vergnaud (1988), citado por Cabrita (1997, p. 73) afirmava: “determinado conceito desenvolve-se não isoladamente mas em relação com outros conceitos, através de vários tipos de problemas e por recurso a vários processos e simbolismos”.

As tarefas matemáticas podem ser: problemas, investigações, exercícios, projetos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, ensaios escritos, etc. Elas são o ponto de partida para que o estudante desenvolva a sua atividade matemática. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições para aplicação de conhecimentos emergentes (Ponte et al., 1997).

A tarefa pode apontar para diversas estruturas ou conceitos matemáticos. Mas estes, estritamente falando, não se encontram na tarefa. O estudante tem de os interpretar e nessa interpretação intervêm sempre fatores de natureza psicológica, cultural e sociológica. As tarefas propostas devem ter em conta as características dos estudantes, os seus interesses e a sua forma de aprendizagem da Matemática.

Uma tarefa envolve sempre uma dada situação de aprendizagem e aponta para um certo conteúdo matemático. A situação de aprendizagem constitui o referente de significados da vida quotidiana ou do domínio da Matemática a que a tarefa se refere, no quadro da cultura do estudante. O conteúdo matemático diz respeito aos aspetos matemáticos envolvidos (factos, conceitos, processos, ideias), no quadro do currículo correspondente. Tanto a situação de aprendizagem como o conteúdo matemático devem apontar de modo sugestivo para conceitos e processos e proporcionar ao estudante uma boa oportunidade de se envolver em atividade matemática.

Segundo Ponte (2005b), as tarefas atendem a duas dimensões consideradas fundamentais, sendo estas, o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. A primeira relaciona-se com a perceção da dificuldade de uma questão e varia, naturalmente, entre os pólos de desafio reduzido e elevado; a segunda, é relativa ao grau de estrutura, variando entre os pólos aberto e fechado.

Neste sentido, denomina-se por *exercício* uma tarefa que é fechada e admite um grau de desafio reduzido; *problema* uma tarefa fechada e com um grau de desafio elevado; *investigação* uma tarefa aberta e de elevado desafio e por fim, a tarefa de *exploração* que é uma tarefa aberta mas com um grau de desafio reduzido. Cruzando estas duas dimensões, obtemos a figura 4 que se segue.

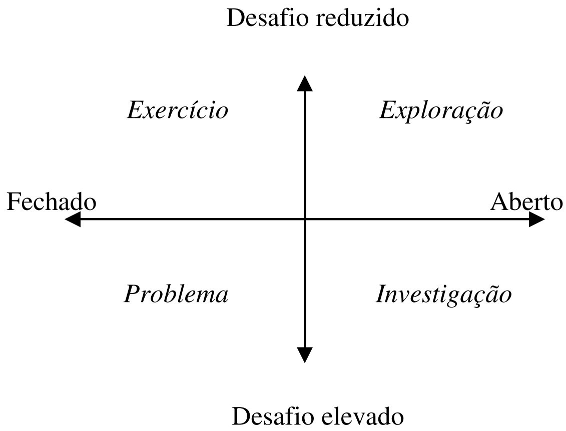


Figura 4 - Relação entre tarefas, grau de desafio e de abertura

Tendo presente as dimensões referidas anteriormente, subjacente às mesmas, encontram-se mais duas outras dimensões, sendo estas, a duração e o contexto das tarefas. Assim sendo, uma tarefa pode apresentar-se com um tempo de duração curto, médio ou longo, onde os exercícios se manifestam com uma duração relativamente curta, devido ao grau de desafio e de estrutura subjacente ao mesmo, com uma duração média encontram-se os problemas, as tarefas de investigação e as tarefas de exploração, e como tarefas de longa duração, encontram-se os projetos. Podemos enquadrar no esquema que se segue, (figura 5) os diferentes tipos de tarefas matemáticas, de acordo com a duração destas, representado em Ponte (2005b).

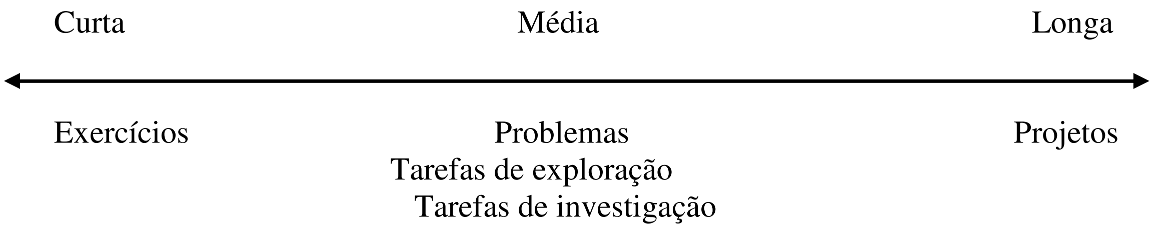


Figura 5 - Diversos tipos de tarefas quanto à duração

Relativamente ao contexto, Ponte (2005b, p. 11) defende que "os pólos aqui são as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos". Porém, Skovsmose (2000) citado em Ponte (2005b, p. 11), refere a "existência de um terceiro contexto, de algum modo intermédio, que designa por "semirrealidade"", onde embora estejam patentes situações reais na tarefa, a maior parte das propriedades reais das situações não são tidas em conta, acabando por ser um contexto quase tão abstrato como o contexto da matemática pura (figura 6).

Figura 6 - Classificação de tarefas quanto ao contexto

Para a OCDE (2005), entidade que organiza o estudo internacional PISA, as tarefas são classificadas em *reprodução*, *conexão* e *reflexão*. As tarefas de *reprodução* são as que envolvem um nível de exigência mais reduzido, pois mobilizam poucas competências, apresentam contextos simples e relativamente familiares, que requerem apenas uma interpretação mínima da situação apresentada e a aplicação de conhecimentos matemáticos básicos, provenientes da sua vivência.

As tarefas de *conexão* apresentam um grau de dificuldade moderado, implicando uma maior mobilização de conhecimentos. Além disso, o seu contexto nem sempre é familiar ao estudante. Estas tarefas requerem que este estabeleça conexões e implicam já um encadeamento de raciocínios, não sendo, por isso, tão estruturadas como as tarefas de reprodução.

As tarefas de *reflexão* são as de maior grau de dificuldade, exigem um elevado nível de interpretação e raciocínio, colocando os estudantes em contextos totalmente desconhecidos. Apelam, por isso, à capacidade de reflexão, argumentação, comunicação e criatividade.

Stein, Remillard, e Smith (2007), pelo seu lado, categorizam as tarefas em dois grandes grupos: com elevado e reduzido nível cognitivo. Chamam a atenção que, por vezes, uma tarefa é proposta a um nível cognitivo elevado mas, depois, com o decorrer do trabalho, muitas vezes devido a uma sugestão ou esclarecimento do professor, o nível cognitivo varia abruptamente, mudando completamente a natureza da tarefa e comprometendo os seus possíveis benefícios em termos de aprendizagem. Também McDonough e Clarke (2003), a partir de um estudo de professores reconhecidos pelos resultados dos seus estudantes, propõem uma caraterização das práticas profissionais, em que as tarefas (incluindo os materiais e representações) surgem como um aspeto fundamental.

A importância decisiva das tarefas para a aprendizagem dos estudantes é uma ideia central da educação Matemática atual (Stein, Remillard e Smith, 2007; NCTM, 2008). Sabemos que faz toda a diferença propor aos estudantes exercícios de aplicação de conhecimentos, problemas que requerem um esforço deliberado de compreensão e a formulação de uma estratégia de resolução, tarefas exploratórias e de investigação que requerem interpretação e formulação de questões, ou projetos de longa duração que envolvem a elaboração de um plano, recolha de dados, sua análise e interpretação.

No programa de Matemática A do Ensino Secundário existem também várias referências que sublinham a importância das tarefas a selecionar pelo professor para a sala de aula, "as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar…" (Silva et al., 2001, p.10). O programa do Ensino Secundário refere-se explicitamente à resolução de problemas, atividades investigativas e, de forma recorrente, às aplicações e modelação matemática.

Assim, hoje em dia parece ser consensual o reconhecimento da enorme importância da tarefa, como base das experiências matemáticas a proporcionar aos estudantes, a vantagem da diversificação de tarefas que possibilite uma diversidade de experiências matemáticas aos estudantes, e a necessidade da sua adequação aos propósitos de ensino definidos pelo professor.

No seu trabalho de preparação letiva, o professor tem como uma das suas principais funções selecionar as tarefas que pretende levar para a sua sala de aula. Até há uns anos, esta seleção constituía um trabalho muito menos complexo do que atualmente. Hoje em dia são inúmeros os mediadores curriculares que proporcionam ao professor um amplíssimo leque de tarefas (Stein e Kim, 2009), às quais o acesso é facilitado por via da Internet.

Por outro lado, as tarefas devem procurar contribuir para dar cumprimento às exigências curriculares atualmente defendidas, pelo que precisam de ser criteriosamente escolhidas consoante a sua orientação para propósitos específicos diferentes. Apesar da tarefa só por si não dizer tudo, ela encerra muito daquilo que os estudantes podem aprender e é reconhecido que as tarefas, pelas suas características próprias, ocasionam diferentes oportunidades para a aprendizagem dos estudantes (Boston e Smith, 2009). Por exemplo, se se pretende desenvolver a capacidade de raciocinar e resolver problemas dos estudantes, é necessário investir em tarefas com elevado nível de complexidade cognitiva (Stein e Lane, 1996; Stein e Smith, 2009). A análise das características das tarefas é, pois, um aspeto essencial para a sua seleção.

Destas breves referências ressalta a necessidade de propor ao estudante tarefas de situações da vida real, de modelação matemática, de resolução de problemas e com conexões entre os diversos temas, privilegiando as atividades investigativas. As tarefas que o manual propõe devem ser desafiantes, diversificadas ao nível da exigência cognitiva, estrutura e contexto. É importante que sejam motivadoras para o estudante, promovam vivências variadas e em simultâneo orientem o aluno no processo de consolidação de conhecimentos.

2.3 Perspetiva Ontossemiótica na Educação Matemática

Nesta secção pretende-se apresentar algumas ferramentas que compõem o enfoque ontossemiótico, do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste sentido, será dado ênfase às configurações de objetos matemáticos primários, às componentes da adequação didática e respetivos indicadores empíricos.

Segundo Godino (2012), o enfoque ontossemiótico teve início na Universidade de Granada no início dos anos noventa, como resultado da interação entre os investigadores desta Universidade com os desenvolvimentos teóricos da Didática da Matemática iniciados em França. Devido à diversidade de teorias usadas para estudar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática surgiu a necessidade de as clarificar e comparar. Deu-se então início a um processo da integração de várias perspetivas da Didática da Matemática até chegarem ao enfoque ontossemiótico. Este é, segundo os autores, “um modelo unificado da cognição e instrução matemática” (Godino, Batanero e Font, 2008, p. 11).

O ponto de partida do enfoque ontossemiótico é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que tenha em conta o triplo aspeto da atividade matemática: como atividade socialmente partilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e como sistema conceptual logicamente organizado. Adotaram como noção primitiva a noção de situação-problema e definiram os conceitos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com o fim de tornar operativo o triplo aspeto da atividade matemática e a génesis pessoal e institucional do conhecimento matemático bem como a sua interdependência.

A *prática matemática* é toda a atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc) que pode ser realizada por uma pessoa quando resolve problemas de matemática, comunica a solução obtida e valida ou generaliza essa solução a outros contextos ou problemas (Godino e Batanero, 1994; Godino, Batanero e Font, 2008).

As práticas podem ser partilhadas no seio de uma instituição ou serem específicas de uma pessoa. A instituição é formada por pessoas que se encontram envolvidas no mesmo género de situações problemáticas. Este compromisso impõe-lhes a realização de determinadas práticas sociais que são, geralmente, condicionadas por regras, modos de funcionamento e instrumentos da instituição.

A tipologia básica de significados institucionais que encontramos em Godino (2003, p.141), apresenta, o *pretendido* e o *referencial*, entre outros. O significado institucional *pretendido* é o sistema de práticas incluídas na planificação do processo de estudo. O *referencial* é o sistema de práticas que se utiliza como referência para a elaboração do significado pretendido. Numa determinada instituição de ensino, este significado de referência será uma parte do significado global do objeto matemático.

2.3.1 Objetos que intervêm e emergem do sistema de práticas

Na *prática matemática* intervêm vários tipos de objetos (símbolos, gráficos, definições, proposições, etc.) que são possíveis de ser representados sob as mais variadas formas, isto é, escrita, oral, etc. Os objetos que emergem dos sistemas de práticas podem ser considerados como “objetos institucionais” quando partilhados por uma instituição ou “objetos pessoais” quando correspondem a uma pessoa (Godino, Batanero e Font, 2008, p.13).

Com o intuito de se realizar uma análise refinada da atividade matemática, Font, Godino e Gallardo (2013) referem seis tipos de entidades primárias a ter em conta:

- *situações-problemas* (aplicações extramatemáticas, exercícios,...).
- *linguagem* (termos, expressões, notações, gráficos,...) em seus diversos registos (escrito, oral, gestual,...);
- *conceitos-definição* (introduzidos mediante definições ou descrições: reta, ponto, número, média, função,...);
- *proposições* (enunciados sobre conceitos,...);
- *procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...);
- *argumentos* (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos; dedutivos ou de outro tipo,...).

Por sua vez, estes objetos matemáticos primários organizam-se em entidades mais complexas: sistemas conceptuais, teorias, etc. Godino, Batanero e Font (2008) indicam que os seis tipos descritos estão relacionados entre si formando configurações, ou seja redes de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas.

Os autores classificam estas configurações em epistémicas (quando se trata de objetos institucionais) e cognitivas (quando se referem a objetos pessoais). A configuração epistémica é o conjunto de objetos matemáticos envolvidos na resolução de atividades (figura 7). Dentro desta configuração distingue-se a prévia (os objetos que o estudante deve saber antes de trabalhar na unidade didática) e a emergente (a que supomos que vá aprender).

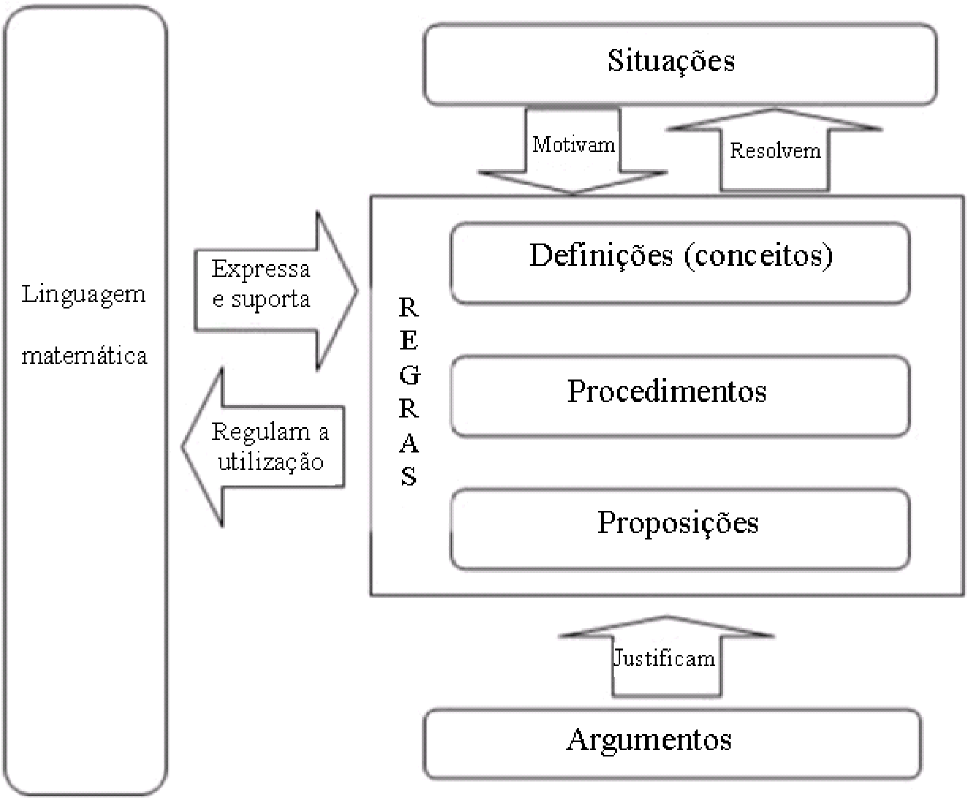


Figura 7 – Componentes e relações numa configuração epistémica

Este tipo de análise ajudará a formular hipóteses sobre pontos críticos do processo de instrução nos quais pode haver lacunas ou vazios de significado, bem como disparidades de interpretação que requerem fases de negociação de significados e mudanças no processo em estudo (Contreras e Ordóñez, 2006).

2.3.2 Dimensão normativa

A educação, como qualquer atividade social é uma atividade regulada em alguns aspetos de forma explícita e noutros implícita. Desde as diretrizes curriculares, normalmente fixadas por decretos oficiais, passando pelos comportamentos de cortesia e respeito mútuo entre o professor e o estudante, o ensino e a aprendizagem são regulados por regras, convenções, hábitos, costumes, tradições, etc. Trata-se de considerar as normas, hábitos e convenções geralmente implícitas que regulam o funcionamento das turmas de matemática, concebida como "microssociedade", que condicionam em maior ou menor medida os conhecimentos que constroem os estudantes. O foco de atenção, nestas aproximações, são principalmente as interações entre professor e estudantes quando abordam o estudo de temas matemáticos específicos.

Todos estes elementos reguladores compõem o que é chamado de "dimensão normativa" dos processos de estudo. A noção de dimensão normativa foi introduzida em Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009). Estes autores abordam o estudo sistemático e global destas noções teóricas da perspetiva unificada do conhecimento e da instrução Matemática que proporciona o enfoque ontossemiótico, tratando de identificar suas conexões mútuas e complementaridades, assim como o reconhecimento de novos tipos de normas que facilitam a análise dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. A figura 8 resume os diferentes tipos de normas identificadas no mencionado trabalho.

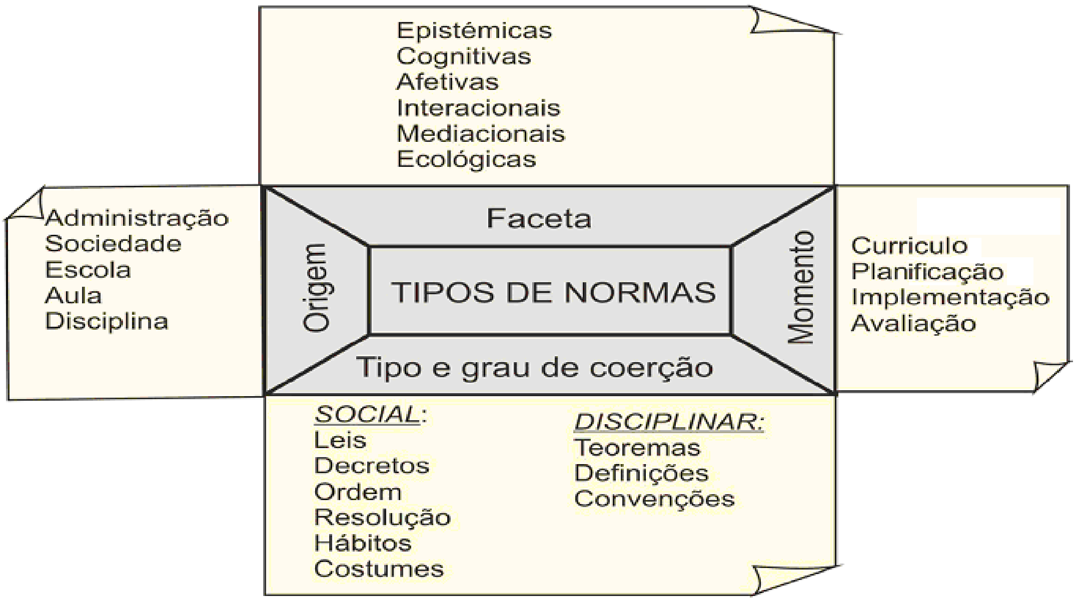


Figura 8 – Dimensão normativa. Tipos de normas.

A identificação das diferentes facetas da dimensão normativa (epistémica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica) permite:

- Avaliar a pertinência das intervenções dos professores e estudantes considerando o conjunto de normas, e sua tipologia, que condicionam o ensino e a aprendizagem.

- Sugerir trocas nos tipos de normas que ajudam a melhorar o funcionamento e controle dos sistemas didáticos, com vistas a uma evolução dos significados pessoais frente aos significados institucionais pretendidos.

2.3.3 Noção de adequação didática

A noção de adequação didática foi introduzida no enfoque ontossemiótico como uma abordagem sistémica para a conceção, implementação e avaliação do ensino e aprendizagem da Matemática. Esta noção permite passar de uma " didática descritiva - explicativa a uma didática normativa, isto é, a uma didática que se orienta para uma intervenção efetiva em sala de aula" (Godino, 2011, p. 5). A adequação didática de uma experiência de ensino compreende uma articulação coerente e sistémica das seguintes adequações parciais: epistémica, cognitiva, mediacional, interacional, emocional e ecológica.

De seguida apresenta-se a descrição, segundo Godino (2011), das seis componentes da adequação didática.

Adequação epistémica - refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais pretendidos (ou implementados), relativamente ao significado de referência. Este significado de referência é relativo ao "nível educativo em que tem lugar o processo de estudo e deverá ser elaborado tendo em conta os diversos tipos de problemas e contextos de uso do conteúdo objeto de ensino, assim como, as práticas operativas e discursivas requeridas" (p. 8). A seleção de tarefas ricas revela ser um elemento chave para se atingir uma alta adequação epistémica. Assim sendo, este tipo de tarefas deve contemplar uma diversidade de representações ou de expressões, por forma a proporcionar aos estudantes diversas formas de as abordar levando-os a interpretar, conjeturar, generalizar e justificar raciocínios. Um outro fator a ter em conta, relativamente às tarefas a serem selecionadas, diz respeito às conexões matemáticas, isto é, "os blocos de conteúdo matemático (numeração e cálculo, álgebra, geometria,…) não devem ser abordados como entidades separadas" (p. 9), estas devem interrelacionar os conceitos, ou seja, numa resolução de problemas com um contexto rico encontram-se em jogo uma grande variedade de ferramentas e compreensões matemáticas subjacentes.

Adequação cognitiva - expressa o "grau em que os significados pretendidos/implementados estão na zona de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como, com a proximidade dos significados pessoais alcançados aos significados pretendidos/implementados" (p. 5). No sentido de atingir esta adequação, os estudantes devem apropriar-se dos significados institucionais pretendidos por via da "participação na comunidade de práticas gerada na aula" (p. 10), promovendo uma maior aproximação entre os significados pessoais iniciais dos estudantes e os pretendidos/implementados. Três dos seis princípios estabelecidos pelo NCTM (2008) sobre o ensino da Matemática estão relacionados com a adequação cognitiva. O princípio da equidade afirma, "A excelência na educação matemática requer equidade: expetativas elevadas e um sólido apoio a todos os alunos" (p. 12). A igualdade na educação exige a adaptação razoável e adequada, sempre que necessário, de modo a promover o acesso e aquisição dos conteúdos por todos os estudantes. O princípio da aprendizagem indica que "Os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios" (p. 21). Também o princípio da avaliação afirma que "A avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos" (p. 23).

Adequação interacional - refere-se ao "grau como os modos de interação permitem identificar e resolver conflitos de significado, favorecendo a autonomia na aprendizagem e o desenvolvimento de competências comunicativas " (p. 11). Um processo de ensino e aprendizagem terá maior adequação, deste ponto de vista, se as configurações e trajetórias didáticas permitirem, por uma lado, identificar potenciais conflitos semióticos[6] (que podem ser detetados à priori) e, por outro lado, resolver conflitos que forem surgindo durante o processo de ensino. Por exemplo, um processo de estudo realizado de acordo com uma sequência de situações de ação, formulação e validação tem, potencialmente, maior adequação do que um processo magistral que não tenha em consideração as dificuldades dos estudantes.

Adequação mediacional - refere-se ao "grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e

[6] Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade ocorre entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos do tipo epistémico, se a disparidade ocorre ao nível das práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, designamo-los como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade ocorre entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos semióticos interacionais.

aprendizagem" (p. 13). Por exemplo, se o professor e os estudantes tivessem à sua disposição meios informáticos pertinentes para o estudo de determinado tema, o processo de ensino e aprendizagem que se apoiasse nestes recursos teria potencialmente maior adequação mediacional que outro baseado exclusivamente na utilização do quadro, lápis e papel.

Adequação emocional - refere-se ao "grau de implicação, interesse e motivação" dos estudantes num processo de ensino (p. 10). A adequação afetiva pode estar relacionada com fatores dependentes da instituição ou relativos ao próprio estudante e sua situação escolar prévia. Contudo, é de salientar que, terão alta adequação emocional, por exemplo, o desenvolvimento de situações-problema que sejam de interesse para o estudante.

Adequação ecológica - refere-se ao "grau em que um plano ou ação formativa para aprender Matemática é adequado dentro do contexto em que se utiliza" (p. 14). Diz respeito a tudo o que está fora da aula (sociedade, currículo, escola, pedagogia, didática da matemática), que condiciona o trabalho que se desenvolve na mesma. O processo de estudo ocorre num contexto educativo que estabelece metas e valores, para a educação dos cidadãos e futuros profissionais, que têm de se ter em conta.

No sentido de se conseguir uma adequação global de determinado processo de ensino e aprendizagem, as várias componentes devem estar integradas e ser consideradas as interações entre as mesmas. Isto requer falar-se da adequação didática como critério sistémico de adequação e pertinência em relação a um projeto educativo global (Godino, Wilhelmi e Bencomo, 2005). No entanto, esta adequação deve ser interpretada como relativa às circunstâncias temporais e contextuais instáveis, o que requer uma atitude de reflexão e investigação por parte do professor e demais agentes que compartilham a responsabilidade de um projeto educativo.

Godinho, Contreras e Font (2006) consideram a grande utilidade destas noções para a análise de projetos e experiências de ensino. Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta adequação numa das dimensões, por exemplo, a epistémica, pode requerer capacidades cognitivas que os estudantes não possuem. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistémica e cognitiva, é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interatuam com as situações-problemas, a linguagem, etc.

A figura 9 mostra um resumo das componentes que compõem a adequação didática. É representada através de um hexágono regular a adequação correspondente a um processo de ensino pretendido ou programado, onde à priori se supõe o grau máximo para as adequações parcelares. O hexágono irregular interno corresponde às adequações efetivamente atingidas na implementação de um processo de ensino e aprendizagem. Na base estão as adequações epistémica e cognitiva por se considerar que o processo de estudo gira à volta do desenvolvimento de conhecimentos específicos.

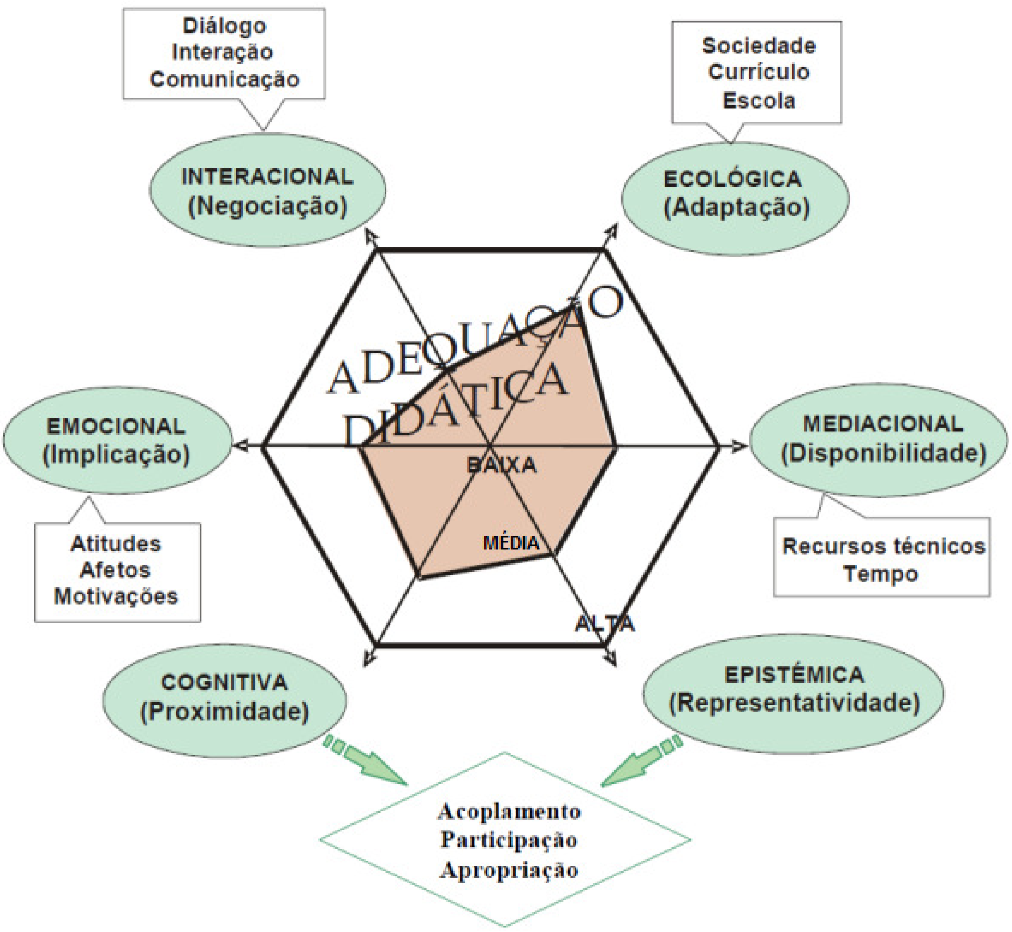


Figura 9 – Componentes da adequação didática

2.3.4 Indicadores de adequação didática

Para cada uma destas componentes de adequação didática, no marco teórico distinguem-se vários indicadores empíricos, que expressam um conjunto de princípios didáticos. Este trabalho centra-se na análise da adequação das componentes epistémica, mediacional e ecológica das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares. De seguida apresentam-se alguns desses indicadores, tendo por base os trabalhos de Godino (2011) e Godino, Rivas e Arteaga (2012).

Adequação epistémica

No enfoque ontossemiótico entende-se que um programa de formação, ou um processo de estudo matemático, tem maior adequação epistémica na medida em que o conteúdo pretendido (ou implementado) está de acordo com o conteúdo de referência. O quadro 5 inclui as componentes e os indicadores empíricos relevantes, que permitem operacionalizar esta noção.

Quadro 5 - Componentes e indicadores da adequação epistémica

COMPONENTES	INDICADORES
Situações-problema	- Se apresenta uma amostra representativa e articulada de situações-problema que permitam contextualizar, exercitar, ampliar e aplicar o conhecimento matemático a situações da própria matemática ou de outros contextos. - Se propõe situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagens	- Se usa diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...), para traduzir problemas e ideias matemáticas analisando a pertinência e potencialidades de um ou outro tipo de representação e realizando processos de tradução entre os mesmos. - Se propõe situações de expressão matemática e interpretação, que permitam ao estudante usar as suas próprias representações para organizar, registar e comunicar ideias.

	- Se o nível de linguagem é apropriado para os estudantes a que se dirige.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- Se as definições e procedimentos são claros e corretos, e estão adaptadas ao nível de ensino a que se dirigem. - Se apresentam os enunciados e procedimentos fundamentais do tema adaptados ao nível de ensino a que se dirigem. - Se propõem situações em que os estudantes têm de generalizar ou aplicar proposições, definições ou procedimentos.
Argumentos	- Se favorece a argumentação e a prova dos enunciados e proposições matemáticas através de diversos tipos de argumentos e métodos de prova. - Se promovem situações em que os estudantes têm de conjeturar sobre relações matemáticas, se as investigam e justificam. - Se as explicações, verificações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem.
Relações	- Se favorece o estabelecimento e uso de conexões entre as ideias matemáticas (problemas, representações, conceitos, procedimentos, propriedades, argumentos). - Se os conteúdos matemáticos são apresentados e se estudam como um todo organizado. - Se reconhece e aplica as ideias matemáticas em contextos não matemáticos.

Para obter uma alta adequação epistémica será necessária a seleção e adaptação de situações-problema ou tarefas ricas. Além disso, também requerem atenção, como propõe o enfoque ontossemiótico, as várias representações ou meios de expressão, definições, procedimentos, proposições e justificações das mesmas. Tais tarefas devem proporcionar aos estudantes diferentes formas de abordá-las, envolver várias representações e requerer que os estudantes conjeturem, interpretem e justifiquem as soluções obtidas.

Também se deve prestar atenção às conexões entre as diferentes partes do conteúdo matemático. A Matemática é um campo de estudo integrado. “Num currículo coerente, as idéias matemáticas estão associadas e construídas umas sobre as outras" (NCTM, 2008, p.15).

Adequação mediacional

Consiste no grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo o NCTM (2008) o uso adequado da tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da Matemática. Este meio pode influenciar positivamente o que é ensinado e, por sua vez, promover a aprendizagem dos estudantes. Segundo o NCTM (2008a) a tecnologia é uma ferramenta essencial para a aprendizagem da matemática no século XXI e todas as escolas devem garantir que os estudantes tenham acesso à tecnologia. Professores eficientes maximizam o potencial da tecnologia para desenvolver a compreensão dos estudantes, estimular o seu interesse e aumentar a sua competência em Matemática. Quando a tecnologia é utilizada estrategicamente, pode fornecer o acesso à Matemática para todos os estudantes.

As calculadoras gráficas e outras ferramentas tecnológicas, tais como, software de geometria dinâmica, applets e dispositivos de apresentação interativa, são componentes vitais para uma educação Matemática de alta qualidade.

O quadro 6 inclui um componente e indicadores de adequação no uso dos recursos tecnológicos, incluindo materiais manipuláveis.

Quadro 6 - Componente e indicadores da adequação mediacional

COMPONENTE	INDICADORES
Recursos materiais (Manipuláveis, calculadoras, computadores)	- Se usa materiais manipuláveis e informáticos que permitem introduzir tarefas ricas, linguagens, procedimentos, argumentações adaptadas ao conteúdo pretendido. - Se as definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos concretos e visualizações.

Adequação ecológica

Diz respeito ao grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo da turma e da escola, à sociedade e aos condicionamentos do contexto no qual se desenvolve. Refere-se a tudo o que está fora da aula, condicionando a atividade que se desenvolve na mesma. Assim, podemos aludir a tudo o que é determinado pela sociedade, escola, pedagogia e didática da matemática. O processo de estudo ocorre num contexto educativo que estabelece metas e valores, para a educação dos cidadãos e futuros profissionais, que devem ser respeitados.

Na escola, a prática matemática pode exercer uma enorme influência de duas maneiras completamente opostas: por um lado, a Matemática reduzida a meros cálculos rotineiros pode reforçar atitudes passivas e complacentes e, por outro lado, a Matemática no seu sentido mais amplo pode desenvolver o pensamento crítico e alternativo.

As componentes e indicadores da adequação ecológica estão incluídas no quadro 7, em particular as conexões do conteúdo matemático com outras áreas curriculares e entre diferentes áreas temáticas dentro da própria matemática.

Quadro 7 - Componentes e indicadores da adequação ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptação ao currículo	- Se o conteúdo, implementação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares. - Se faz a revisão de pré-requisitos indicados no programa.
Abertura para a inovação didática	- Inovação baseada na investigação e na prática reflexiva. - Integração de novas tecnologias (calculadoras, computadores, TIC, etc) no projeto educativo.
Adaptação sócio--profissional e cultural	- O conteúdo contribui para a formação sócio-profissional dos estudantes.
Educação em valores	- Se contempla a formação em valores democráticos e do pensamento crítico.
Conexões intra e interdisciplinares	- Os conteúdos relacionam-se com outros conteúdos intra e interdisciplinares.

Nas secções anteriores, identificámos alguns indicadores para as três adequações que nos propomos utilizar, na análise dos manuais escolares. Estas adequações não se devem considerar como fatores independentes já que ocorrem interações entre elas. Um indicador para a interação entre as componentes epistémica e ecológica é se o currículo propõe estudar problemas diversificados em áreas como a vida escolar, quotidiana e do trabalho.

As ferramentas descritas podem ser aplicadas à análise de um processo pontual de estudo implementado numa aula, ao planeamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível mais global, por exemplo, o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Também podem ser úteis para analisar aspetos parciais de um processo de estudo, material didático, um livro de texto, respostas dos estudantes a tarefas específicas, ou "incidentes didáticos" pontuais.

CAPÍTULO III

ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO DO ESTUDO

Neste capítulo, subdividido em quatro secções, é apresentada a metodologia da investigação utilizada no presente estudo. Na primeira secção refere-se a natureza do estudo. Na segunda descrevem-se as etapas que o referido estudo atravessou. Na terceira secção é descrita a grelha de análise dos manuais escolares. Por último, na quarta secção, são descritos os sujeitos do estudo.

3.1 Natureza do Estudo

A escolha da metodologia a utilizar numa investigação deve fazer-se em função da natureza do problema em estudo. A investigação em educação engloba dois grandes paradigmas fundamentais: o qualitativo e o quantitativo.

O termo qualitativo invocado em investigação parte do pressuposto básico de que a investigação dos fenómenos humanos, cria e atribui significados às coisas e estas podem ser descritas e analisadas, prescindindo de quantificações estatísticas (Chizzotti, 2003). Contrariamente, se define o termo quantitativo, que recorre à quantificação como via de assegurar a validade de uma generalização e é um processo que visa testar objetivamente alguma teoria ou conjunto de hipóteses (Lankshear e Knobel, 2008).

Este estudo pretende analisar a abordagem didática das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais de Matemática do 12.º ano de escolaridade. Para atingir esta finalidade, definiram-se as quatro questões de investigação já apresentadas. Na tentativa de responder a estas questões, optou-se por um estudo inserido na investigação qualitativa, justificando-se de seguida a sua escolha.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 50) na abordagem qualitativa “os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva”. Ou seja, quando recolhem os dados os investigadores não partem de uma hipótese prévia; apenas têm em conta as finalidades do estudo em causa. Essa característica está presente neste estudo, pois à partida não é definida qualquer hipótese; os manuais são analisados, tendo em conta as categorias presentes no instrumento de recolha de dados, a fim de dar resposta às nossas questões de investigação.

A abordagem qualitativa "é uma investigação descritiva" pois carateriza-se pela análise de dados ricos em pormenores descritivos, que não se reduzem apenas a números (Bogdan e Biklen, 1994, p. 48). Esta característica está presente neste estudo pois a forma de apresentação dos dados será uma descrição do que foi observado no manual. Segundo estes autores o valor de uma investigação qualitativa está assente na teoria de que os problemas podem ser resolvidos e as práticas podem ser aperfeiçoadas, recorrendo-se para isso à observação e análise do objeto em estudo e à descrição completa dos resultados.

De acordo com Silverman (2001), uma das técnicas de recolha de dados usada em investigações qualitativas é a análise de textos e documentos. Uma vez que o objeto de estudo é o manual escolar, esta investigação usa a análise documental.

3.2 Fases e componentes da investigação

Este estudo decorreu entre setembro de 2012 e junho de 2013 e compreendeu duas grandes fases, cada uma das quais com diversas componentes.

O ponto de partida da investigação foi a definição da problemática seguida de revisão de literatura, não tendo sido encontrado nenhum trabalho sobre este tema específico (análise das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares do 12.º ano de Matemática A). Seguiu-se a pesquisa para o enquadramento teórico, que compreendeu o estudo da perspetiva ontossemiótica da educação Matemática, a leitura e análise da tese de doutoramento de Lourdes Ordóñez Cañada[7] (Ordóñez, 2011), levantamento de diretrizes curriculares e análise de diversos documentos. Seguidamente definiu-se o "corpus" do estudo - todos os manuais escolares de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, em vigor no ano letivo 2012/2013. Optou-se por analisar apenas um tema nos manuais, para

[7] Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidade de Jaén, Espanha.

não tornar o estudo inviável, no período de tempo previsto. Tendo em conta os objetivos definidos para o estudo selecionou-se a técnica de recolha de dados - análise documental.

Concluída a revisão de literatura que suporta a fundamentação teórica do estudo bem como a construção do instrumento de recolha de dados, procedeu-se, numa segunda fase, à construção de uma grelha de análise de manuais escolares. A grelha usada por Ordóñez (2011), para analisar os apontamentos de uma turma, que compreende seis categorias, serviu de base para o nosso trabalho. Esta grelha foi por nós adaptada para a análise de manuais escolares, tendo em conta o esquema desenvolvido por Godino (2002; 2011), as diretrizes curriculares e a especificidade das funções exponenciais e logarítmicas. Depois de algumas reformulações, por sugestões da orientadora, chegou-se à versão que se apresenta na próxima secção deste capítulo. Seguiu-se a elaboração dos descritores da referida grelha, o seu preenchimento para cada um dos manuais e a recolha de dados relativos aos indicadores da adequação epistémica, mediacional e ecológica em cada um dos manuais. Por último, procedeu-se à análise e discussão dos dados e respetivas conclusões.

3.3 Grelha de análise dos manuais escolares

Como já foi referido, procedeu-se à análise de manuais do 12.º ano de Matemática A, tendo em conta as categorias da grelha de análise de manuais, adaptada de Ordóñez (2011). Assim, na análise a efetuar, distinguem-se as seguintes categorias de entidades primárias: situações, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentações.

De seguida, são apresentados os descritores de cada uma das seis categorias, bem como das suas subcategorias.

1. Situações, de acordo com o tipo de situação de ensino que se utiliza. Podem ser as seguintes:

1.1 Tipo de situações que se usam para *introduzir/ motivar* para as funções exponenciais e logarítmicas: uso de uma situação da própria matemática, uso de uma situação de outras ciências ou uso de uma situação da vida real. Analisa-se se apresenta uma proposta de resolução ou não.

1.2 *Exemplos* que se utilizam para facilitarem a compreensão do discurso matemático. Analisa-se: o lugar onde se incluem (antes ou depois da definição formal), o que se pretende com eles, se a resolução é completa ou incompleta e como (de modo formal ou intuitivo).

1.3 *Tarefas* que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados. As tarefas classificam-se atendendo às subcategorias:

- *Conhecimentos prévios*: tarefas destinadas a rever pré-requisitos sobre Funções e Gráficos do 10.º ano e Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11º ano, que se consideram necessários para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas do 12.º ano.
- *Conhecimentos emergentes*:

1) *Representação gráfica de funções*: destinado ao desenvolvimento de destreza na representação gráfica de funções.
2) *Cálculo algorítmico*: destinado ao desenvolvimento de destreza algorítmica e aplicação das regras expostas.
3) *Exploração* (com ou sem recurso à calculadora): destinada a que o leitor selecione e utilize as ferramentas mais adequadas para a sua resolução e cujo objetivo é despertar o interesse e desenvolver um raciocínio, usando conhecimentos já adquiridos.
4) *Aplicação de uma definição*: para clarificar ou interpretar uma definição.
5) *Aplicação de uma propriedade*: para interpretação e clarificação da mesma.
6) *Conjeturar e argumentar*: destinado a prever um determinado resultado e apresentar um discurso lógico que o sustente.
7) *Prova*: argumentação que justifica a validade de uma proposição ou um procedimento. A prática discursiva pode incluir elementos empíricos, indutivos, lógico-dedutivos,...
8) *Modelação matemática*: contextualizada numa situação vivida pelo leitor. Nesta subcategoria, apenas são contabilizadas tarefas em que o estudante tem de descobrir o modelo da função que melhor se ajusta à situação descrita.

2. Linguagem, que pode ser do tipo: verbal, numérica, gráfica, simbólica, algébrica ou tabelar.

3. Conceitos, introduzidos mediante uma definição, tais como: função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Analisaremos se há uma única definição e se esta é formal ou intuitiva.

4. Proposições: enunciados sobre conceitos tais como: propriedades das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, assíntotas, continuidade, injetividade, paridade…); regras operatórias das funções exponenciais e logarítmicas; crescimento das funções exponenciais e logarítmicas; limites: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}, \quad a>1,\, p\in IR \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} \quad , \ a>1 \ .$$

Vamos analisar a forma como se expõem estas propriedades, tendo em conta as seguintes subcategorias:

4.1 Se a exposição que é feita das propriedades é formal ou intuitiva.

4.2 Se se provam, justificam ou só se expõem.

4.3 Se se utilizam ou só se expõem sem mais referência.

5. Procedimentos. Os procedimentos utilizados para resolver as atividades. Distinguimos:

5.1 Se se empregam vários procedimentos para resolver as situações ou somente um em cada caso.

5.2 Se os procedimentos que se utilizam são justificados ou simplesmente se expõem como métodos rotineiros.

5.3 Se utiliza as novas tecnologias (calculadora gráfica, computador, sensores,...).

6. Argumentações. Mostram o tipo de argumentações utilizadas no desenvolvimento. Distinguimos:

6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer o leitor da validade de determinadas propriedades ou proposições, baseada na linguagem natural, gráfica,...

6.2 Tipo de prova (empírica, indutiva, lógico-dedutiva, contraexemplos, equivalências,...).

Apresenta-se de seguida, no quadro 8, a versão final da grelha de análise dos manuais escolares do 12.º ano, relativamente ao tópico das funções exponenciais e logarítmicas.

Quadro 8 - Grelha de análise de manuais escolares

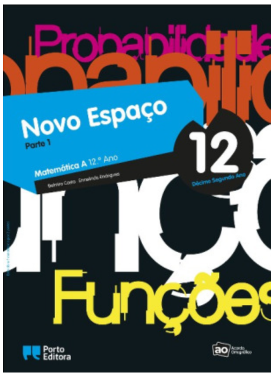
<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do manual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Situações</td><td colspan="2">1.1 Introdução/motivação</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1.2 Exemplos
(tarefas resolvidas)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td></td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes</td><td>1- Representação gráfica de funções
2 - Cálculo algorítmico
3 - Exploração
4 - Aplicação da definição
5 - Aplicação de uma propriedade
6 - Conjeturar e argumentar
7 - Prova
8 - Modelação matemática</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Se se utilizam ou só se expõem.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5. Procedimentos</td><td colspan="2">5.1 Se utiliza diversas abordagens.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">5.2 Justificam-se ou não.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">5.3 Se utiliza as novas tecnologias.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">6. Argumentações</td><td colspan="2">6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">6.2 Tipo de prova usada.</td><td></td></tr>
</table>

3.4 Sujeitos do Estudo

Para tentarmos dar resposta às nossas questões, analisamos o tópico das funções exponenciais e logarítmicas, nos seis manuais escolares de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, em vigor no ano letivo 2012-2013.

Através da consulta do site www.wook.pt, foi possível verificar quais os manuais adotados em cada escola de Portugal continental e dos arquipélagos da Madeira e dos Açores. Deste modo, contabilizamos o número de escolas que adotaram cada um dos manuais no referido ano letivo. Em anexo, apresenta-se o resultado dessa consulta.

Os manuais selecionados para o estudo foram ordenados e nomeados consoante o número de escolas que o adotaram: M1, M2, M3, M4, M5 e M6. Assim, o manual identificado com o número um é o mais adotado nas escolas de Portugal continental e dos arquipélagos da Madeira e dos Açores e assim sucessivamente até ao manual identificado com o número seis que é o menos adotado, no ano letivo 2012-2013. Seguidamente faz-se uma breve apresentação de cada manual escolar em estudo, referindo-se para todos os manuais a capa, o título, os autores e a editora.



Manual M1

Título: Novo Espaço - Matemática A - 12.º Ano.
Autores: Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues.
Editora: Porto Editora.

Figura 10 – Manual M1

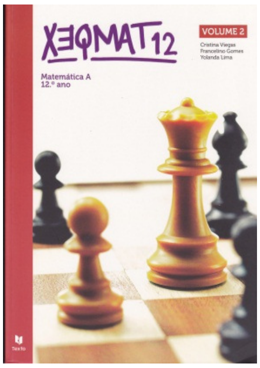
Manual M2

Título: Matemática A - 12.º Ano.

Autores: Maria Augusta Ferreira Neves, Albino Pereira,
Jorge Nuno Silva.

Editora: Porto Editora.

Figura 11 – Manual M2



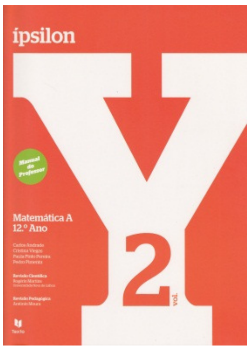
Manual M3

Título: Xeqmat 12 - Matemática A - 12.º Ano.

Autores: Cristina Viegas, Francelino Gomes, Yolanda Lima.

Editora: Texto Editores.

Figura 12 – Manual M3



Manual M4

Título: Ípsilon 12 - Matemática A - 12.º Ano.

Autores: Carlos Andrade, Cristina Viegas, Paula Pinto Pereira,
Pedro Pimenta.

Revisão Científica: Rogério Martins.

Revisão Pedagógica: António Moura.

Editora: Texto Editores.

Figura 13 – Manual M4

Manual M5

Título: Matemática A - 12.º Ano.

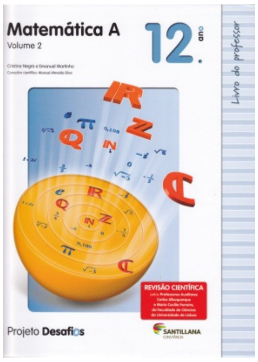
Autores: Luzia Gomes, Daniela Raposo.

Consultor Científico: Filipe Carvalho.

Consultor Pedagógico: José Maria Antunes.

Editora: Edições ASA.

Figura 14 – Manual M5



Manual M6

Título: Desafios 12.º Ano – Matemática A.

Autores: Cristina Negra e Emanuel Martinho.

Consultor Científico: Manuel Almeida Silva.

Revisão Científica: Carlos Albuquerque e Maria Cecília Ferreira.

Editora: Santillana.

Figura 15 – Manual M6

Para cada um destes manuais, vamos selecionar o tópico das funções exponenciais e logarítmicas do tema "Introdução ao cálculo Diferencial II" e preencher a grelha de análise.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

O presente capítulo está subdividido em três secções. Na primeira apresentam-se os resultados, através das grelhas de análise preenchidas e faz-se uma descrição sucinta da forma de abordagem das funções exponenciais e logarítmicas, em cada um dos manuais escolares. Na segunda secção, apresenta-se uma análise das situações propostas nos manuais escolares. Por fim, faz-se uma análise da adequação epistémica, mediacional e ecológica dos manuais, tendo em conta os indicadores apresentados no quadro teórico do estudo.

Os dados recolhidos serão analisados recorrendo à análise de conteúdo que, segundo Bardin (2004), é das "técnicas mais comuns na investigação empírica realizada pelas diferentes ciências humanas e sociais" (p. 101). Esta técnica "consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto (…), por forma a desvendar e quantificar a ocorrência de palavras/frases/temas considerados «chave» que possibilitem uma comparação posterior" (Coutinho, 2011, p. 193). De acordo com Bogdan e Biklen (1994) a finalidade desta técnica "será pois efetuar inferências, com base numa lógica explicitada, sobre mensagens cujas características foram inventariadas e sistematizadas" (p. 104). Assim, esta técnica permite ao investigador tratar os dados, resumindo-os e compreendendo os fenómenos investigados.

Segundo Coutinho (2011) existem dois tipos de análise de conteúdo descritos na literatura: "aqueles que fazem intervir categorias pré definidas anteriormente à análise (…) e aqueles que não as fazem intervir, tendo por isso um caráter puramente exploratório" (p. 193). Dos dois tipos de análise de conteúdo descritos resumidamente, o que se aplica a este estudo é o primeiro.

Bardin (2004) refere que podemos distinguir três fases de análise de conteúdo. A primeira é a pré-análise, onde é definido um esquema de trabalho com procedimentos bem precisos, embora flexíveis. Na segunda fase, a exploração, colocam-se em prática as decisões tomadas na fase anterior. A última fase é o tratamento de dados, que implica tornar os resultados brutos em resultados significativos e válidos.

4.1 Recolha de dados dos manuais escolares

Apresentamos a análise realizada ao tópico das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares adotados em Portugal e nas ilhas dos Açores e Madeira, no ano letivo 2012/2013. Para cada manual fez-se a análise das tarefas que os autores propõem ao estudante, tendo-se contabilizado o número de itens de cada tipo, de acordo com os descritores apresentados no capítulo da metodologia.

Manual M1

No quadro 9 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M1.

Quadro 9 – Grelha de análise do manual M1

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do manual M1</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. Situações</td><td colspan="2">1.1 Introdução/motivação</td><td>• Pequena nota histórica focada nos contributos que alguns matemáticos e um economista deram para as funções.
• Utiliza um problema da vida real e uma tarefa de outra ciência que não resolve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)</td><td>• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico.
• Ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas.
• Resolução formal e completa.</td></tr>
<tr><td>1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td>Progressões geométricas, objetos e imagens de funções: 11</td></tr>
</table>

1. Situações	1.3 Tarefas (que o autor propõe ao estudante)	Conhecimentos emergentes	1 - Representação gráfica de funções: 2 2 - Cálculo algorítmico: 158 3 - Exploração: 21 4 - Aplicação da definição: 41 5 - Aplicação de uma propriedade: 123 6 - Conjeturar e argumentar: 6 7 - Prova: 39 8 - Modelação matemática: 0
2. Linguagem			Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos. Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).
3. Conceitos			Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.
4. Proposições	4.1 Tipo de exposição.		A exposição é formal à exceção dos limites notáveis que é intuitiva.
	4.2 Se se prova ou não.		Prova as regras operatórias dos logaritmos. Os limites notáveis e as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas são justificados de forma intuitiva. As restantes propriedades só se expõem.
	4.3 Se se utilizam ou só se expõem.		Aplicação através de exemplos após o enunciado.
5. Procedimentos	5.1 Se utiliza diversas abordagens.		Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.
	5.2 Justificam-se ou não.		Justificam os procedimentos que propõem, exceto as equações e inequações que se expõem como métodos rotineiros.
	5.3 Se utiliza as novas tecnologias.		Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões.

6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Argumentação: apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético, analítico ou de indução matemática.

Os autores começam o tópico das funções exponenciais e logarítmicas, com uma breve referência histórica ao economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus (o primeiro a sustentar que a população humana segue um crescimento exponencial, enquanto a oferta de alimentos tem um crescimento linear). Referem ainda alguns contributos dos matemáticos Newton, Leibniz, Euler e José Anastácio da Cunha para as funções.

Apresentam uma lenda relacionada com o jogo do xadrez com vários itens e uma tarefa ligada às Ciências da Saúde para ilustrar o crescimento exponencial e rever conhecimentos prévios de progressões geométricas, objetos e imagens de funções, que não resolvem.

Definem função exponencial e apresentam as propriedades das funções exponenciais de base superior a um, recorrendo aos gráficos de três exemplos concretos, e resumem-nas num quadro.

Num pequeno texto sobre o número e, recordam que é o limite de uma sequência e indicam o seu valor aproximado. De seguida, utilizam o caso particular da função $f(x)=2^x$ para convencer o leitor que também os números irracionais têm imagem por esta função. Recordam as regras das potências do 8.º ano e referem que estas regras continuam válidas para as potências de expoente irracional.

Na resolução de equações e inequações limitam-se a apresentar exercícios resolvidos, sem referirem a injetividade e monotonia das funções exponenciais. Por último, comparam o crescimento da função exponencial $f(x)=2^x$ com algumas funções polinomiais, através de gráficos e tabelas (figura 16), procurando convencer o leitor do limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p}$, $a > 1$ e $p \in IR$.

x	2^x	x^2	x^3	x^4
1	2	1	1	1
2	4	4	8	16
3	8	9	27	81
4	16	16	64	256
5	32	25	125	625
...	...	...	...	...
9	512	81	729	6 561
10	1 024	100	1 000	10 000
...	...	...	...	...
16	65 536	256	4 096	65 536
17	131 072	289	4 913	83 521
...	...	...	...	...

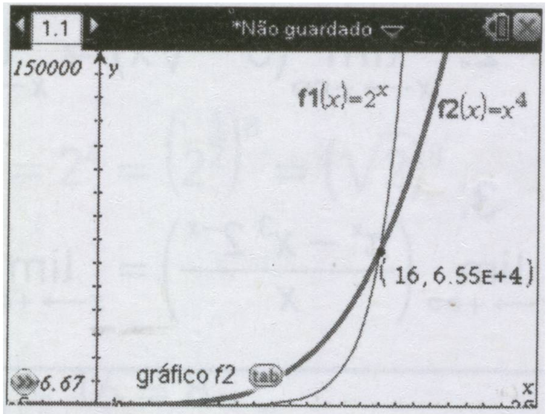


Figura 16 - Comparação do crescimento exponencial com o da potência

Para introduzir a noção de logaritmo, colocam algumas questões cuja resolução passa por resolver equações com exponenciais, sem recorrer à calculadora. Assim, transmitem a ideia de que o logaritmo é o expoente de uma potência e introduzem a notação. Logo após, os autores apresentam a definição formal de logaritmo, mostram a equivalência entre a forma logarítmica e a exponencial. Resolvem algumas equações envolvendo exponenciais cujo resultado é um número irracional. Deste modo, mostram que o logaritmo é uma ferramenta para resolver equações. Fazem referência às notações do logaritmo de base 10 e de base e e justificam que só existem logaritmos de números positivos.

Para introduzir a noção de função logarítmica, os autores partem do caso particular da função $f(x) = 2^x$, referem que é injetiva, portanto admite função inversa e apresentam o gráfico das duas funções. De seguida passam à generalização, apresentando a definição de função logarítmica.

Segue-se uma referência histórica focada nos contributos que os matemáticos Michael Stifel, John Neper, Henry Briggs e Edmund Gunter deram para os logaritmos. O manual apresenta curiosidades sobre os logaritmos para despertar o interesse do estudante e estimular a reflexão (figura 17).

Curiosidade

Os logaritmos

Atualmente, a utilização da calculadora e/ou computador permite cálculos complicados de forma rápida e eficaz.

A invenção dos logaritmos foi decisiva no desenvolvimento do cálculo no século XVI. Os logaritmos surgem como resposta para as dificuldades dos matemáticos da época em lidar com cálculos complicados. Desta forma, transformar operações mais complexas em operações mais simples, como, por exemplo, transformar multiplicações e divisões em adições e subtrações seria um contributo fundamental.

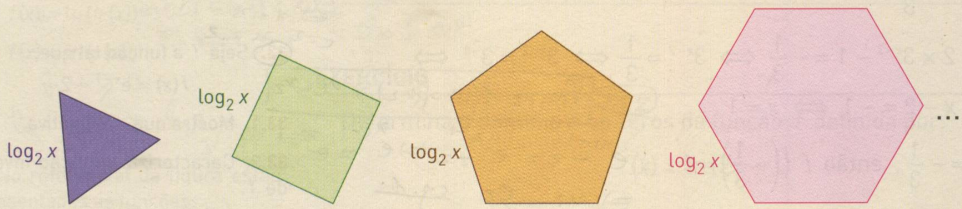
Este tipo de transformações foi possível, em alguns casos particulares, e disso se ocupou o matemático alemão Michael Stifel (1487–1567), chegando a construir extensas tabelas com registos de correspondências.

Figura 17 - Curiosidade / referência histórica sobre os logaritmos

Descrevem as propriedades analíticas e gráficas das funções logarítmicas de base superior a um, partindo de exemplos concretos, apresentam um quadro-resumo a que se seguem exercícios resolvidos para determinar o domínio e caracterizar a função inversa de funções logarítmicas.

Os autores propõem uma tarefa, relacionada com a Geometria, que leva o estudante a conjeturar propriedades dos logaritmos (figura 18).

2. Seja n o número de lados de um polígono regular em que a medida, l, do lado é dada por $l = \log_2 x$.



Designa por P o perímetro do polígono. $P = n \log_2 x$

2.1. Transcreve para o teu caderno a tabela e completa-a com os valores em falta.

n	x	$l = \log_2 x$	$P = n \log_2 x$	$\log_2 x^n$
3	2	...	...	...
4	...	3	...	...
5	16	...	...	...
6	...	8	...	...

2.2. Compara os resultados obtidos nas duas últimas colunas da tabela e conjetura uma propriedade operatória dos logaritmos.

Figura 18 - Tarefa com ligações à Geometria para conjeturar uma propriedade dos logaritmos

Apresentam, de seguida, algumas propriedades que resultam diretamente da definição de logaritmo. Seguem-se as propriedades operatórias dos logaritmos (produto, cociente, potência e mudança de base) que são provadas. Os autores propõem ao estudante que prove pelo método de indução matemática uma igualdade de logaritmos (é o único manual a referir este método de prova nas funções exponenciais e logarítmicas).

Apresentam a resolução de equações e inequações com logaritmos sem qualquer introdução teórica. Os autores propõem ao estudante tarefas de aplicação das funções exponenciais e logarítmicas à Economia, Biologia, Física e Química.

Para comparar o crescimento logarítmico com o da potência partem do caso particular do gráfico da função $y = \log_2 x$ e das funções lineares $y = 0{,}2x$, $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}5x$, $y = x$ para concluir que o crescimento da função logarítmica é muito lento, argumentam, graficamente e em linguagem corrente, que o crescimento da potência é maior que o da função linear e concluem, intuitivamente, o limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1$ e $p > 0$.

Seguem-se tarefas de aplicação das funções exponenciais e logarítmicas às Ciências da Saúde e à Física. Apresentam o modelo logístico e um problema de modelação resolvido, recorrendo à regressão estatística, seguido de tarefas de aplicação do referido modelo ao crescimento de populações, venda de produtos e propagação de vírus.

Os autores propõem ao estudante, para além dos exercícios nas margens do manual, páginas completas de tarefas ricas e diversificadas, intercaladas com a exposição dos conteúdos. Estas tarefas estabelecem conexões com outros temas da Matemática (como a Geometria), a vida real ou outras ciências. No final das funções exponenciais e logarítmicas, apresentam catorze páginas de tarefas, de escolha múltipla e desenvolvimento. De todas as tarefas propostas ao estudante, 22% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências. Este tópico termina com um teste de avaliação (sem cotações).

Manual M2

No quadro 10 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M2.

Quadro 10 – Grelha de análise do manual M2

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do manual M2</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Situações</td><td colspan="2">1.1 Introdução/motivação</td><td>• Pequena nota histórica focada no contributo de vários matemáticos.
• Utiliza uma situação da própria matemática que não resolve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.2 Exemplos
(tarefas resolvidas)</td><td>• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico.
• Ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas.
• Resolução formal e completa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td>Representações gráficas e progressões geométricas: 8</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes</td><td>1 - Representação gráfica de funções: 0
2 - Cálculo algorítmico: 111
3 - Exploração: 2
4 - Aplicação da definição: 27
5 - Aplicação de uma propriedade: 14
6 - Conjeturar e argumentar: 6
7 - Prova: 6
8 - Modelação matemática: 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td><td>Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos.
Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...)</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td><td>Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td><td>A exposição é formal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td><td>Prova as regras operatórias dos logaritmos.</td></tr>
</table>

		As restantes propriedades só se expõem.
	4.3 Se se utilizam ou só se expõem.	Aplicação através de exemplos após o enunciado.
5. Procedimentos	5.1 Se utiliza diversas abordagens.	Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.
	5.2 Justificam-se ou não.	Justifica os procedimentos que propõe.
	5.3 Se utiliza as novas tecnologias.	Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões.
6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Argumentação: apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético ou analítico.

Este tópico tem início com uma breve referência histórica a alguns contributos que os matemáticos Newton, Leibniz e Cauchy deram para o cálculo infinitesimal. Os autores propõem uma situação da própria matemática, para ilustrar o crescimento exponencial, que não resolvem.

Apresentam exemplos de funções exponenciais, seguidos da definição formal. De seguida, utilizam o caso particular $2^{\sqrt{3}}$ para convencer o leitor, que também os números irracionais fazem parte do domínio da função exponencial e apresentam um exemplo de aplicação destas funções ligado à Biologia.

Segue-se o estudo intuitivo da família de funções exponenciais de base superior a um, recorrendo aos gráficos de três exemplos concretos. De seguida, apresentam um estudo análogo para as funções exponenciais com base entre 0 e 1 (fora do âmbito do programa).

Apresentam a fundamentação teórica para a resolução de equações e inequações e vários exemplos de aplicação. Recordam as transformações de gráficos de funções e o número e, definindo-o através do limite de uma sequência. Apresentam aplicações das funções exponenciais na modelação de situações ligadas à Física e Economia.

Os autores do manual apresentam uma pequena nota histórica focada no contributo de John Neper para os logaritmos. Para introduzir a noção de função logarítmica, partem do caso particular da função $f(x)=2^x$, referem que é injetiva, portanto admite função inversa. Mostram o gráfico das duas funções e uma tabela com alguns objetos e imagens por estas funções, que pretendem levar o estudante a intuir a definição de logaritmo. De seguida, apresentam a definição de função logarítmica.

Apresentam exemplos de manipulação da definição e justificam a inexistência de logaritmos de números negativos. Os autores mencionam que além da base 10, também é muito usada a base e e ensinam a trabalhar com estes logaritmos na calculadora.

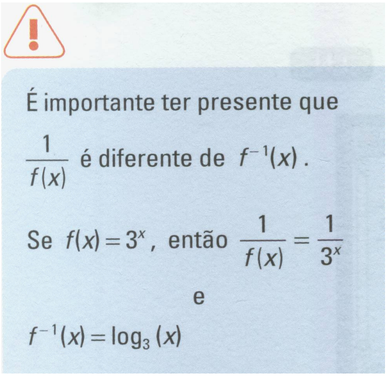
Apresentam novamente as propriedades das funções exponenciais e concluem as das funções logarítmicas (de base superior a um e entre 0 e 1), a que se seguem exemplos para determinar o domínio destas funções. Fazem referência às transformações de gráficos de funções logarítmicas.

As propriedades operatórias dos logaritmos - produto, cociente, potência e mudança de base - são introduzidas utilizando um exemplo numérico para cada uma delas. Em seguida, os autores generalizam a propriedade, provam-na e mostram outro exemplo numérico de aplicação.

Referem a injetividade da função logarítmica e apresentam a resolução de equações com logaritmos. Mostram como se caracteriza a função inversa da exponencial ou da logarítmica. Fazem referência à monotonia destas funções e apresentam inequações resolvidas. Por último, mostram aplicações das funções exponenciais e logarítmicas à Economia, Biologia e Ciências da Saúde.

É o único manual que não apresenta os limites notáveis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^p}$, $a>1$, $p\in IR$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^P}$, $a>1$ no tema das funções exponenciais e logarítmicas, deixando o seu estudo para o tema da teoria dos limites.

No decorrer da exposição dos conteúdos, os autores do manual M2 fazem chamadas de atenção para possíveis conflitos semióticos do estudante (figura 19).



É importante ter presente que

$\frac{1}{f(x)}$ é diferente de $f^{-1}(x)$.

Se $f(x) = 3^x$, então $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3^x}$

e

$f^{-1}(x) = \log_3(x)$

Figura 19 - Chamada de atenção para um possível conflito semiótico

Para além das tarefas nas margens do manual, no final das funções exponenciais e logarítmicas apresentam seis páginas com tarefas de resposta aberta, um resumo dos conteúdos e um teste de avaliação com as respetivas cotações. Das tarefas que os autores propõem ao estudante, 24% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências.

Manual M3

No quadro 11 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M3.

Quadro 11 – Grelha de análise do manual M3

Categorias	Subcategorias	Análise do Manual M3
1. Situações	1.1 Introdução/motivação	• Utiliza duas situações da vida real que não resolve. • Pequena nota histórica focada no contributo dos matemáticos John Neper e Henry Briggs para os logaritmos.
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)	• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico. • Ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas. • Resolução formal e completa.

1. Situações	1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)	Conhecimentos prévios	Transformações de gráficos de funções; assíntotas; representações gráficas e regras operatórias das potências: 85
		Conhecimentos emergentes	1 - Representação gráfica de funções: 20 2 - Cálculo algorítmico: 249 3 - Exploração: 39 4 - Aplicação da definição: 52 5 - Aplicação de uma propriedade: 124 6 - Conjeturar e argumentar: 16 7 - Prova: 17 8 - Modelação matemática: 5
2. Linguagem			Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos. Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).
3. Conceitos			Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.
4. Proposições	4.1 Tipo de exposição.		A exposição é formal à exceção dos limites notáveis que é intuitiva.
	4.2 Se se prova ou não.		Prova as regras operatórias dos logaritmos. As restantes propriedades só se expõem.
	4.3 Se se utilizam ou só se expõem.		Aplicação através de exemplos após o enunciado.
5. Procedimentos	5.1 Se utiliza diversas abordagens.		Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.
	5.2 Justificam-se ou não.		Justificam os procedimentos que propõem.
	5.3 Se utiliza as novas tecnologias.		Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões. Propõe o uso de sensores (temperatura e som), computadores com software específico e Internet.

6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético ou analítico.

Os autores começam o tópico, com duas atividades, que não resolvem, para rever conceitos básicos de funções e para explorar a calculadora gráfica.

Recordam as potências de expoente racional e apresentam uma atividade, que não resolvem, para levar o estudante a intuir o significado de 2^{π} e, deste modo, passar a trabalhar com potências de expoente real. Referem que as regras operatórias das potências mantêm-se para estas novas potências e recordam-nas.

Definem função exponencial e propõem uma atividade, que não resolvem, para o estudante descobrir as propriedades da função exponencial (figura 20) partido da função $f(x) = 2^x$.

1. Obtém com a calculadora gráfica uma representação da função exponencial f definida por $f(x) = 2^x$ e indica, das afirmações seguintes, as que são verdadeiras:

a) A função f é crescente em $\mathbb{R}$ e o seu crescimento é muito rápido em $\mathbb{R}^+$.

b) O gráfico da função f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

c) O contradomínio de f é o intervalo $[0, +\infty[$.

d) A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f.

e) Quando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$.

f) Quando $x \to 0$, $f(x) \to -\infty$.

g) O gráfico de f apresenta uma assíntota vertical.

2. Recorre à calculadora para representar graficamente e em simultâneo as funções exponenciais f, g e h definidas por:

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = 3^x \ \text{e}\ h(x) = (\sqrt{10})^x$$

a) Observa e compara os gráficos de f, g e h e anota características comuns e não comuns.

Figura 20 - Tarefa para o estudante descobrir as propriedades da função exponencial

De seguida os autores propõem uma tarefa para o estudante comparar o crescimento exponencial com o da potência. Apresentam as propriedades das funções exponenciais de base superior a um e o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, $a > 1$ e $p \in IR$.

Fazem referência à injetividade da função exponencial e exemplificam a resolução de equações; referem a monotonia destas funções e mostram como resolver inequações. Fazem ainda referência às propriedades dos gráficos das exponenciais de base entre 0 e 1 (fora do âmbito do programa). Propõem uma atividade para recordar as transformações de gráficos de funções. Apresentam um teste com cinco itens de escolha múltipla e cinco de construção (sem cotações).

Seguem-se exemplos de aplicação das funções exponenciais às Ciências da Saúde, Economia, Física, Química e Demografia. Recordam o número e, definindo-o através do limite de uma sequência.

Para introduzir a noção de logaritmo, os autores colocam uma equação exponencial com bases diferentes (figura 21). Neste momento os autores dizem que para resolvermos este tipo de problemas precisamos dos logaritmos.

Na equação $3^x = 12$, x representa o número a que se tem de elevar 3 para obter 12.
Será que esse número existe? Será que é único?

Figura 21 - Situação para introduzir a noção de logaritmo

Assim, transmitem a ideia de que o logaritmo é o expoente de uma potência e introduzem a notação. Só depois apresentam a definição formal de logaritmo, mostram a equivalência entre a forma logarítmica e a exponencial, resolvem algumas equações exponenciais cujo resultado é um número irracional e convidam o leitor a justificar a inexistência de logaritmos de números negativos nem de base 1.

Deste modo, mostram que o logaritmo é uma ferramenta para resolver equações. Apresentam ainda algumas consequências da definição. Os autores mencionam que além da base 10, também é muito usada a base e e ensinam a trabalhar com estes logaritmos na calculadora. Apresentam aplicações à Geologia e Ciências da Saúde. Apresentam um teste com a mesma estrutura do anterior.

Os autores do manual apresentam uma pequena nota histórica, focada no contributo de John Neper e Henry Briggs para os logaritmos. Propõem tarefas que levam o estudante a conjeturar as propriedades dos logaritmos Apresentam de seguida as propriedades operatórias dos logaritmos (produto, cociente, potência e mudança de base) que são provadas. Referem que são uma ferramenta para a resolução de equações com logaritmos e exemplificam.

Para o estudo das propriedades das funções logarítmicas de base superior a um utilizam os gráficos da função $y = 2^x$ e da sua inversa $y = \log_2 x$. Fazem referência ao limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^P} = 0$, $a > 1$. Os autores propõem ao estudante tarefas de aplicação das funções logarítmicas ligadas à Geologia e à Física. Apresentam um teste com a mesma estrutura dos anteriores.

Os autores fazem referência à monotonia das funções logarítmicas, salientam a importância do domínio de existência das expressões na resolução de inequações e exemplificam. Mostram o processo para caracterizar a função inversa de funções exponenciais e logarítmicas. Fazem referência à função logística e apresentam mais aplicações das funções exponenciais e logarítmicas a situações da vida real. Apresentam um teste com a mesma estrutura dos anteriores.

Para além das tarefas nas margens do manual, apresentam mais atividades intercaladas com a exposição dos conteúdos, com o propósito de levar o estudante a intuir, conjeturar e argumentar. No final do tema propõem oito páginas de tarefas e um quadro síntese dos conteúdos lecionados. À medida que vão expondo novos conteúdos apresentam nas margens do manual sugestões de tarefas do final do tema, orientando assim o trabalho do estudante.

É o manual que apresenta um maior número de tarefas propostas. Revela uma grande preocupação com a revisão de conhecimentos prévios e apresenta tarefas ricas muito diversificadas. De todas as tarefas que o autor propõe ao estudante, 24% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências.

No final do capítulo "Cálculo diferencial II" sugerem atividades de investigação e curiosidades com recurso à calculadora gráfica, sensores de temperatura e som, computadores com software específico, livros e Internet. Propõem também outro tipo de investigações, como pesquisar o modo de funcionamento da Régua de Cálculo. Estas investigações fazem parte das sugestões da brochura das funções de apoio ao 12.º ano.

É o único manual que apresenta algumas considerações sobre os diferentes métodos de prova matemática: sintético, analítico e de indução matemática. No entanto, ao longo da exposição dos conteúdos deste tópico, exibe apenas exemplos de aplicação dos métodos sintético ou analítico.

Manual M4

No quadro 12 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M4.

Quadro 12 – Grelha de análise do manual M4

Categorias	Subcategorias	Análise do manual M4
1.Situações	1.1 Introdução/motivação	• Utiliza uma situação da vida real que não resolve e uma situação de outra ciência que explora. • Pequena nota histórica focada no contributo de John Neper e Henry Briggs para os logaritmos.
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)	• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico. • Ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de

<table>
<tr><td rowspan="3">1. Situações</td><td colspan="2"></td><td>resolução das tarefas.
• Resolução formal e completa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td>Progressões geométricas; $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; função inversa; assíntotas; regras operatórias das potências; monotonia; extremos; inequações de funções racionais; taxa média de variação; interpretação geométrica da derivada: 60</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes</td><td>1 - Representação gráfica de funções: 8
2 - Cálculo algorítmico: 228
3 - Exploração: 16
4 - Aplicação da definição: 22
5 - Aplicação de uma propriedade: 86
6 - Conjeturar e argumentar:10
7 - Prova: 24
8 - Modelação matemática: 12</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td><td>Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos.
Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td><td>Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td><td>A exposição é formal à exceção dos limites notáveis que é intuitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td><td>Prova as regras operatórias dos logaritmos. As restantes propriedades só se expõem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Se se utilizam ou só se expõem.</td><td>Aplicação através de exemplos após o enunciado.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5. Procedimentos</td><td colspan="2">5.1 Se utiliza diversas abordagens.</td><td>Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.2 Justificam-se ou não.</td><td>Justificam os procedimentos que propõem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.3 Se utiliza as novas tecnologias.</td><td>Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões.
Propõe o uso do computador para aceder à</td></tr>
</table>

		Internet.
6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético ou analítico.

Os autores começam o tópico das funções exponenciais e logarítmicas com uma tarefa, que não resolvem, para rever conceitos básicos de progressões geométricas, explorar a calculadora e ilustrar o crescimento exponencial. Segue-se um teste de diagnóstico introdutório, para revisão de conceitos fundamentais sobre: função inversa; assíntotas; regras operatórias das potências; monotonia; extremos; inequações de funções racionais; taxa média de variação; interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto e progressões geométricas.

Os autores apresentam uma situação da Biologia para, partindo de uma progressão geométrica, obterem o gráfico de uma função exponencial. Recordam as potências de expoente racional e utilizam o caso particular $3^{\sqrt{3}}$ para dar significado às potências de expoente irracional. Referem que as regras operatórias das potências de expoente real são as mesmas do 8.º ano e exemplificam-nas.

Apresentam a definição formal de função exponencial e propõem ao estudante uma tarefa envolvendo a função $f(x) = 2^x$, para o levar a intuir as propriedades das funções exponenciais de base maior que um, que os autores apresentam a seguir.

Fazem referência ao limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^p}$, $a > 1$ e $p \in IR$. Apresentam também o gráfico da função exponencial de base entre 0 e 1 (fora do âmbito do programa).

Recordam o número e, definindo-o através do limite de uma sequência, dão o seu valor aproximado e referem que a exponencial de base e é especial por esta função coincidir com a sua derivada. Propõem uma tarefa ao estudante para rever as transformações de gráficos de funções e apresentam diversas equações e inequações resolvidas, justificando a utilização da injetividade e monotonia. Terminam com uma aplicação da função exponencial à Biologia.

À semelhança do manual M3, à medida que vão expondo novos conteúdos, apresentam nas margens do manual sugestões de tarefas do final do tema, orientando assim o trabalho do estudante. No decorrer da exposição dos conteúdos remetem o estudante para sites da Internet onde o aluno pode obter mais informação (figura 22).

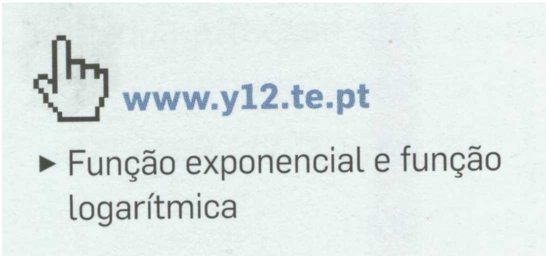


Figura 22 – Endereço de um site na Internet com mais informação

Para introduzir os logaritmos, os autores começam por apresentar uma referência histórica, focada nas contribuições dos matemáticos John Neper e Henry Briggs.

Introduzem a noção de logaritmo com base numa tarefa para multiplicar e dividir números sem calculadora e sem esforço. Apresentam a definição formal, fazem referência às notações do logaritmo de base 10 e de base e e referem que só existem logaritmos de números positivos. Seguem-se exemplos de aplicação.

Apresentam consequências da definição, enunciam as regras operatórias dos logaritmos e provam-nas, a que se seguem exemplos de aplicação. Mostram como se resolvem equações envolvendo logaritmos. Apresentam um teste com itens de seleção e de construção (sem cotações).

Apresentam a definição formal de função logarítmica. Justificam que é a função inversa da exponencial e com base no gráfico desta função apresentam o da função logarítmica.

Enunciam as propriedades das funções logarítmicas de base maior que um. Referem o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0 \quad , \ a > 1$.

Apresentam exercícios resolvidos de caracterização da função inversa e de inequações com logaritmos. Seguem-se aplicações das funções exponenciais e logarítmicas à Arqueologia, Matemática Financeira, Física e Demografia. Por último, fazem referência às escalas semilogarítmicas. Apresentam um teste com a mesma estrutura do anterior seguido da síntese dos tópicos abordados. Oferecem ao estudante um formulário/súmula com os conteúdos do manual.

Para além dos exercícios nas margens do manual apresentam, no final das funções exponenciais e logarítmicas, vinte páginas de tarefas ricas e diversificadas. Das tarefas que os autores propõem ao estudante, 28% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências.

No final do capítulo "Cálculo diferencial II" sugerem uma tarefa de investigação que envolve a função exponencial como solução de um problema histórico da Geometria. Esta tarefa faz parte das sugestões da brochura de funções de apoio ao programa.

Manual M5

No quadro 13 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M5.

Quadro 13 – Grelha de análise do manual M5

Categorias	Subcategorias	Análise do manual M5
1. Situações	1.1 Introdução/motivação	• Explora uma situação da vida real e uma situação de outra ciência. • Pequena nota histórica focada no contributo de Malthus para as exponenciais e de Neper para os logaritmos.
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)	• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico. • Ilustram a apresentação correta do

<table>
<tr><td rowspan="3">1. Situações</td><td colspan="2"></td><td>texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas.
• Resolução formal e completa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td>Apresenta um resumo das progressões aritméticas e das progressões geométricas.
$Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ e progressões geométricas: 8</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes</td><td>1 - Representação gráfica de funções: 9
2 - Cálculo algorítmico: 149
3 - Exploração: 5
4 - Aplicação da definição: 15
5 - Aplicação de uma propriedade: 56
6 - Conjeturar e argumentar: 0
7 - Prova: 19
8 - Modelação matemática: 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td><td>Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos.
Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td><td>Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td><td>A exposição é formal à exceção dos limites notáveis que é intuitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td><td>Prova as regras operatórias dos logaritmos.
Os limites notáveis e as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas são justificados de forma intuitiva.
As restantes propriedades só se expõem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Se se utilizam ou só se expõem.</td><td>Aplicação através de exemplos após o enunciado.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Procedimentos</td><td colspan="2">5.1 Se utiliza diversas abordagens.</td><td>Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.2 Justificam-se ou não.</td><td>Justificam os procedimentos que propõem.</td></tr>
</table>

	5.3 Se utiliza as novas tecnologias.	Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões.
6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético ou analítico.

Os autores começam por apresentar a resolução de duas tarefas envolvendo progressões geométricas – uma situação da vida real e outra ligada à Biologia. Nas margens, apresentam um resumo das progressões aritméticas e das geométricas.

De seguida definem função exponencial de base maior que um. Partindo das tabelas e gráficos das funções $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$ e $h(x)=5^x$, descrevem as propriedades das funções exponenciais de base maior que um e apresentam um estudo idêntico para as de base entre 0 e 1 (fora do âmbito do programa). Nas margens apresentam um resumo de conceitos básicos sobre funções e o número e como limite de uma sucessão. Resolvem uma tarefa de aplicação da função exponencial à Demografia. De seguida, os autores apresentam uma breve referência histórica, ao economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus.

Apresentam tarefas resolvidas sobre transformações de gráficos de funções e um resumo. Utilizam o caso particular 2^{π} para dar significado às potências de expoente irracional. Dão a indicação de que as regras operatórias das potências de expoente real são as mesmas do 8.º ano e enunciam-nas. Apresentam equações resolvidas, referindo a injetividade da exponencial e apresentam um esquema com os passos a seguir. Procedem da mesma forma com as inequações, referindo a monotonia da função exponencial. Comparam, graficamente, o crescimento da função exponencial $f_1(x)=2^x$ com as funções polinomiais $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$ e $f_4(x)=x^4$ para convencer o leitor do limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}=+\infty$, $a>1$ e $p\in IR$ e aplicam-no através de exemplos.

Para introduzirem a noção de logaritmo, os autores apresentam uma equação exponencial com bases diferentes. Neste momento, os autores referem que para resolver este tipo de equação são necessários os logaritmos, introduzem a notação e apresentam a definição formal. Seguem-se exemplos de aplicação e algumas consequências da definição. Nas margens introduzem a notação para os logaritmos de base 10 bem como os de base e e ensinam a trabalhar com estes logaritmos na calculadora.

Os autores referem que a função exponencial, por ser injetiva, admite inversa, que é a função logarítmica. Apresentam os gráficos das duas funções e baseiam-se nos gráficos de três funções logarítmicas de base maior que um para estabelecerem as suas propriedades. Fazem um estudo idêntico para as de base entre 0 e 1 (fora do âmbito do programa).

Segue-se uma breve referência histórica, focada nos contributos que o matemático John Neper deu para os logaritmos.

Apresentam exemplos das transformações de gráficos de funções. Enunciam as propriedades operatórias dos logaritmos, provam-nas e exemplificam-nas. Apresentam a resolução de equações e inequações com justificações, um esquema de resolução e dão indicação de erros típicos dos estudantes neste tópico (figura 23).

Erro típico

Um dos erros mais comuns na resolução do exercício anterior é:

$$\ln (x^2) = 2 \ln 3$$
$$\Leftrightarrow 2 \ln x = 2 \ln 3$$
$$\Leftrightarrow \ln x = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$
$$\underbrace{\text{C.S.} = \{3\}}$$

Conjunto-solução ERRADO!

Ao fazer a substituição da expressão $\ln x^2$ pela expressão $2 \ln x$, estamos a passar de uma expressão com domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ para uma expressão de domínio $\mathbb{R}^+$, o que faz com que as duas expressões **não sejam equivalentes**, para além de poder provocar a perda de soluções. Assim, nunca se deve substituir uma expressão por outra de domínio "mais restrito".
Repara que nesta resolução se perdeu a solução $x = -3$.

Figura 23 - Erro típico na resolução de equações com logaritmos

Caracterizam a função inversa de funções exponenciais e logarítmicas e apresentam um esquema a seguir pelo estudante. Seguem-se aplicações das funções exponenciais e logarítmicas à Arqueologia, Economia, Física, Química e Demografia.

Por último, comparam os gráficos de diversas funções logarítmicas de base maior que um com os de funções polinomiais, para levar o estudante a intuir o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1$ e $p \in IR^+$, a que se seguem exemplos de aplicação.

Para além das tarefas pospostas nas margens, os autores apresentam, no final das funções exponenciais e logarítmicas, oito páginas com itens de seleção e de construção. Estas questões estão assinaladas com diferentes cores, de acordo com o seu grau de dificuldade. Das tarefas que os autores propõem ao estudante, 25% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências. No final do tema remetem o estudante para um caderno de testes contendo sete testes cumulativos e dois testes globais que não foi objeto da nossa análise.

Manual M6

No quadro 14 apresenta-se a recolha de dados realizada no manual M6.

Quadro 14 – Grelha de análise do manual M6

Categorias	Subcategorias	Análise do manual M6
1.Situações	1.1 Introdução/motivação	• Pequena nota histórica focada no contributo de Neper para os logaritmos. • Apresenta uma tarefa de outras ciências que não resolve.
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)	• Incluem-se depois do desenvolvimento teórico. • Ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas. • Resolução formal e completa.

<table>
<tr><td rowspan="2">1.Situações</td><td rowspan="2">1.3 Tarefas (que os autores propõem ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td><td>Regras operatórias das potências e progressões geométricas: 11</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes</td><td>1 - Representação gráfica de funções: 4
2 - Cálculo algorítmico: 144
3 - Exploração: 8
4 - Aplicação da definição: 19
5 - Aplicação de uma propriedade: 74
6 - Conjeturar e argumentar: 1
7 - Prova: 13
8 - Modelação matemática: 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td><td>Linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos.
Utiliza a linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td><td>Função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Apresenta uma única definição formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td><td>A exposição é formal à exceção dos limites notáveis que é intuitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td><td>Prova as regras operatórias dos logaritmos.
As propriedades das funções exponenciais e logarítmicas são justificadas de forma intuitiva bem como o limite notável
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p}, \ a > 1, \ p \in IR$.
As restantes propriedades só se expõem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Se se utilizam ou só se expõem.</td><td>Aplicação através de exemplos após o enunciado.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5. Procedimentos</td><td colspan="2">5.1 Se utiliza diversas abordagens.</td><td>Vários para resolver a mesma situação (analítico, geométrico,...) embora predomine o analítico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.2 Justificam-se ou não.</td><td>Justificam os procedimentos que propõem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.3 Se utiliza as novas tecnologias.</td><td>Exploração com a calculadora gráfica para ajudar a resolver as questões.
Propõe o uso do computador com o</td></tr>
</table>

		software GeoGebra e Internet.
6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Apresenta um discurso em linguagem natural para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos: sintético ou analítico.

Os autores começam por apresentar uma tarefa envolvendo progressões geométricas, ligada à Biologia, que não resolvem.

Utilizam o caso particular $2^{\sqrt{3}}$ para dar significado às potências de expoente irracional. Referem que as regras operatórias das potências de expoente real são as mesmas do 8.º ano e enunciam-nas. De seguida definem função exponencial de base maior que um e enunciam as suas propriedades. Resolvem uma tarefa de aplicação da função exponencial à Demografia.

Apresentam equações e inequações resolvidas, referindo a injetividade e a monotonia da função exponencial. Seguem-se aplicações desta função à Física, Arqueologia e Matemática Financeira.

Comparam, usando gráficos e tabelas, o crescimento da função exponencial $y = 2^x$ com o de algumas funções polinomiais, para convencer o leitor do limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,\ \ a > 1$ e $p \in IR$ e aplicam-no através de exemplos.

De seguida, os autores apresentam uma breve referência histórica, focada nos contributos que o matemático John Neper deu para os logaritmos.

Para introduzirem a noção de logaritmo, os autores apresentam uma equação exponencial com bases diferentes. Neste momento, referem que para resolver este tipo de equação são necessários os logaritmos, introduzem a notação e apresentam a definição formal. Seguem-se exemplos de aplicação e algumas consequências da definição. Introduzem a notação para os logaritmos de base 10 bem como os de base e e ensinam a trabalhar com estes logaritmos na calculadora.

Para introduzirem a definição de função logarítmica, os autores propõem ao estudante a tarefa da figura 24.

Considere a função definida em IR por: $E(x) = 2^x$

6.1 Justifique que a função E admite inversa.

6.2 Represente E graficamente e, por transformação geométrica do gráfico de E, obtenha o gráfico da inversa de E.

6.3 Indique algumas características de E^{-1}, nomeadamente: o domínio, o contradomínio, os pontos de interseção com os eixos coordenados a continuidade e a monotonia.

Figura 24 - Tarefa utilizada para introduzir a função logarítmica

De seguida, definem função logarítmica como inversa da exponencial, apresentam os gráficos das duas funções e enunciam as propriedades das funções logarítmicas de base maior que um. Referem o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1$ e mostram como caracterizar a função inversa da exponencial.

De seguida, propõem ao estudante uma tarefa para o levar a intuir as regras operatórias dos logaritmos, enunciam-nas, provam-nas e apresentam exemplos de aplicação. Exemplificam o precesso de resolução de equações e inequações. Apresentam tarefas resolvidas para caracterizar a função inversa de uma função exponencial e de aplicação à Física, Biologia e Demografia.

Os autores apresentam, para além dos exercícios propostos nas margens, tarefas intercaladas com a exposição dos conteúdos e quatro páginas com itens de seleção e de construção, no final do tópico. Das tarefas propostas ao estudante, 19% são contextualizadas em situações da vida real ou de outras ciências. Apresentam um teste de avaliação que contém grelha de cotações, o que permite ao estudante tomar consciência da sua progressão na consolidação dos conhecimentos.

No final do capítulo “Cálculo diferencial II” sugerem tarefas de investigação, com recurso à calculadora gráfica, computador com o software GeoGebra e Internet. Uma destas tarefas faz parte da brochura das funções, de apoio ao programa de Matemática do 12.º ano.

Apresenta duas páginas com a história dos logaritmos e um resumo esquemático que relaciona os conceitos abordados.

Os autores apresentam ainda no manual o “Espaço projeto” que pretende estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e outras ciências. A título de exemplo apresenta-se na figura 25 um dos projetos, que faz parte dos exemplos apresentados na brochura de funções do 12.º ano.

Atividade/Projeto

- Projetar e construir uma régua de cálculo de dimensões médias (acima de 20 cm).
- Construa também um pequeno manual de utilização da régua de cálculo com uma breve referência histórica da sua utilização.

Endereços sugeridos:

http://icarus.physics.montana.edu/math/csr.html (construção de uma régua circular).

http://educacao.uol.com.br/matematica/regua-de-calculos-como-funciona-a-mae-da-calculadora.jhtm

http://www.youtube.com/watch?v=d782aZHPHSU

Figura 25 - Projeto para elaborar uma régua de cálculo

Todos os manuais têm cadernos de exercícios que o estudante pode adquirir, no entanto, não foram alvo da nossa análise.

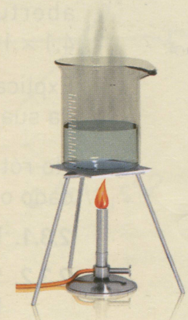
Configurações epistémicas

Em todos os manuais, o tópico das funções exponenciais e logarítmicas, segue a estrutura seguinte: i) problemas introdutórios da vida real, de outras ciências ou da própria matemática; ii) exemplos resolvidos que ajudam o estudante na apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução de problemas; iii) tarefas de aplicação imediata e iv) tarefas de consolidação propostas no fim do tópico.

Todos os manuais analisados propõem tarefas ao estudante da vida real e de outras ciências (aproximadamente um quarto do total de tarefas propostas). A título de exemplo apresenta-se na figura 26 uma dessas tarefas com ligações a outras ciências.

3. Numa experiência laboratorial para obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se uma certa quantidade de água do mar num gobelé, que se expôs a uma fonte de calor.
Após t horas do início da experiência, a quantidade de água existente num gobelé, em mililitros, é dada pela expressão:

$$Q(t) = 10^3 \times \log\left(\frac{10}{t+1}\right)$$



3.1. Que quantidade de água se utilizou na experiência?

3.2. Comenta a afirmação: "Ao fim de duas horas, 50% da água com que se tinha iniciado a experiência tinha passado ao estado gasoso."

3.3. Mostra que a quantidade de água, em mililitros, que passou ao estado gasoso, t horas após o início da experiência, é dada pela função G, tal que $G(t) = 1000 \log(t+1)$.

3.4. A experiência é dada como concluída no momento em que toda a água tenha passado ao estado gasoso.

Determina, por processos exclusivamente analíticos, o tempo que durou a experiência.

Figura 26 - Tarefa com ligações a outras ciências

Nos seis quadros anteriores apresentamos a análise das situações, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações, em cada um dos manuais escolares de Matemática A em vigor no ano letivo 2012/2013. Estes seis tipos de objetos matemáticos articulam-se formando configurações epistémicas.

A análise destas configurações dá-nos informação sobre a "anatomia do texto matemático" dos manuais escolares. A organização do tópico das funções exponenciais e logarítmicas proposta nos manuais escolares do 12.º ano, pode ser apresentada mediante as configurações epistémicas das figuras 27 e 28.

SITUAÇÕES

Tarefas de introdução e de aplicação de outras ciências ou da vida real; exemplos (exemplificam as definições); tarefas de aplicação da própria matemática (de prova ou de aplicação de procedimento).

Motivam

Resolvem

LINGUAGEM

Verbal:
(termos e expressões):
- função, variável…
- apresentam-se funções através de um enunciado.

Simbólica:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- expressão algébrica:
$y = 2^x$

Numérica:
- e^3 ; 10^{-5}

Gráfica:
- gráficos cartesianos

Tabelar:
- apresentam-se funções mediante tabelas.

Expressa e suporta

Regulam a utilização

R E G R A S

DEFINIÇÕES / CONCEITOS

<u>Prévios</u>: domínio, contradomínio, injetividade, assíntota…

<u>Emergentes</u>: função exponencial de base superior a um.

PROCEDIMENTOS

- determinar domínio e contradomínio;
- investigar a influência de parâmetros em famílias de funções exponenciais e reconhecer as suas consequências gráficas;
- resolver equações e inequações envolvendo exponenciais;
- comparar o crescimento exponencial com o da potência;
- determinar limites;
- realizar demonstrações dedutivas.

PROPOSIÇÕES / PROPRIEDADES

<u>Prévios</u>:
- regras operatórias das potências;
- transformações de gráficos de funções;
- progressões geométricas (termo geral, soma…).

<u>Emergentes</u>:
- propriedades das funções exponenciais de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, assíntotas, continuidade, injetividade, paridade…);
- transformações de gráficos de funções exponenciais;
- regras operatórias das funções exponenciais;
- crescimento das funções exponenciais;
- limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p}$, $a > 1$, $p \in IR$

Justificam

ARGUMENTOS

Explicações para facilitar a compreensão; justificação visual de limites; exemplificação da técnica a seguir; demonstrações dedutivas.

Figura 27 - Configuração epistémica das funções exponenciais

SITUAÇÕES

Tarefas de introdução da própria matemática; exemplos (exemplificam as definições); tarefas de aplicação (de prova ou de aplicação de procedimento) da matemática pura, de outras ciências ou da vida real.

Motivam

Resolvem

LINGUAGEM

Verbal:
(termos e expressões):
- função, variável…
- apresentam-se funções através de um enunciado.

Simbólica:
- $x \in D_f$
- expressão algébrica:
$y = \log_a x$

Numérica:
- $\log_2 100$

Gráfica:
- gráficos cartesianos

Tabelar:
- apresentam-se funções mediante tabelas.

Expressa e suporta

Regulam a utilização

REGRAS

DEFINIÇÕES / CONCEITOS

<u>Prévios</u>: potência, função, domínio, contradomínio, injetividade, assíntota, função inversa, composta, função exponencial…

<u>Emergentes</u>: logaritmo; função logarítmica de base superior a um.

PROCEDIMENTOS

- determinar objetos, imagens, domínio, contradomínio;
- caracterizar a função inversa;
- comparar o crescimento logarítmico com o da potência;
- aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos;
- resolver equações e inequações; determinar limites;
- realizar demonstrações dedutivas.

PROPOSIÇÕES / PROPRIEDADES

<u>Prévios</u>:
- regras operatórias das funções exponenciais;
- transformações de gráficos de funções.

<u>Emergentes</u>:
- propriedades das funções logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, assíntotas, continuidade…);
- regras operatórias das funções logarímicas (logaritmo do produto, quociente, potência e mudança de base);
- transformações de gráficos das funções logarítmicas;
- função logarítmica como inversa da exponencial;
- limites: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x}$, $a>1$

Justificam

ARGUMENTOS

Explicações para facilitar a compreensão; justificação visual de limites; exemplificação da técnica a seguir (cálculo do domínio, caracterização da função inversa, equações,…); demonstrações dedutivas.

Figura 28 - Configuração epistémica das funções logarítmicas

4.2 Análise das situações propostas nos manuais escolares

Para dar resposta à primeira questão de investigação: "Que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?", começamos por fazer uma análise das situações de introdução / motivação, apresentadas nos manuais escolares.

Relativamente à forma como os autores introduzem o tópico das funções exponenciais e logarítmicas, quase todos apresentam situações da vida real ou de outras ciências (tabela 3). Apenas o manual M2 coloca uma tarefa introdutória da própria matemática. Os manuais M1, M4, M5 e M6 apresentam uma situação de outra ciência. Destes quatro manuais, os três primeiros apresentam, tal como o manual M3, situações de introdução alusivas à vida real. Além disso, constata-se que, a maioria dos manuais não explora as situações de introdução/motivação. Apenas o manual M5 apresenta a resolução das duas situações e o manual M4 resolve a tarefa alusiva às outras ciências.

Tabela 3 – Situações de introdução / motivação nos manuais escolares

Situação / Manual	Da própria matemática	De outras ciências	Da vida real
M1		1	1
M2	1		
M3			2
M4		1	1
M5		1	1
M6		1	

Todos os manuais apresentam uma pequena nota histórica focada no contributo de algum matemático para as funções exponenciais e logarítmicas. Apenas o manual M6 desenvolve a história dos logaritmos e propõe uma pesquisa histórica.

Em todos os manuais há a preocupação de apresentar exemplos (tarefas resolvidas), depois do desenvolvimento teórico, para facilitar a compreensão do discurso matemático. Os exemplos ajudam o estudante na apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução de problemas. Apresentam uma resolução completa e formal.

De seguida, apresenta-se uma análise dos diferentes tipos de tarefas matemáticas que os autores dos diversos manuais propõem aos estudantes.

Pela análise da tabela 4, poderemos concluir que o manual M3 é o que apresenta um maior número de tarefas matemáticas, seguido dos manuais M4, M1, M6 e M5. O manual M2 apresenta o menor número de tarefas propostas ao estudante (menos da terça parte de M3).

Tabela 4 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas nos manuais

Manual / Tarefa	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Conhecimentos prévios	11	8	85	60	8	11
Representação gráfica de funções	2	0	20	8	9	4
Cálculo algorítmico	158	111	249	228	149	144
Exploração	21	2	39	16	5	8
Aplicação da definição	41	27	52	22	15	19
Aplicação de uma propriedade	123	14	124	86	56	74
Conjeturar e argumentar	6	6	16	10	0	1
Prova	39	6	17	24	19	13
Modelação matemática	0	3	5	12	2	2
Total de tarefas	401	177	607	466	263	276

Com base nesta tabela elaborou-se, para cada manual, um gráfico de barras que permite comparar os diferentes tipos de tarefas matemáticas propostas pelos autores dos manuais ao estudante.

Tarefas propostas no manual M1

Na figura 29 podemos verificar que no manual M1 são mais valorizadas as tarefas de cálculo algorítmico (40%) e aplicação de uma propriedade (31%), como por exemplo as regras operatórias das exponenciais ou dos logaritmos (logaritmo do produto, do quociente, da potência e mudança de base), propriedades analíticas e gráficas das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, assíntotas, continuidade, monotonia, injetividade…), transformações de gráficos das funções exponenciais ou logarítmicas e limites.

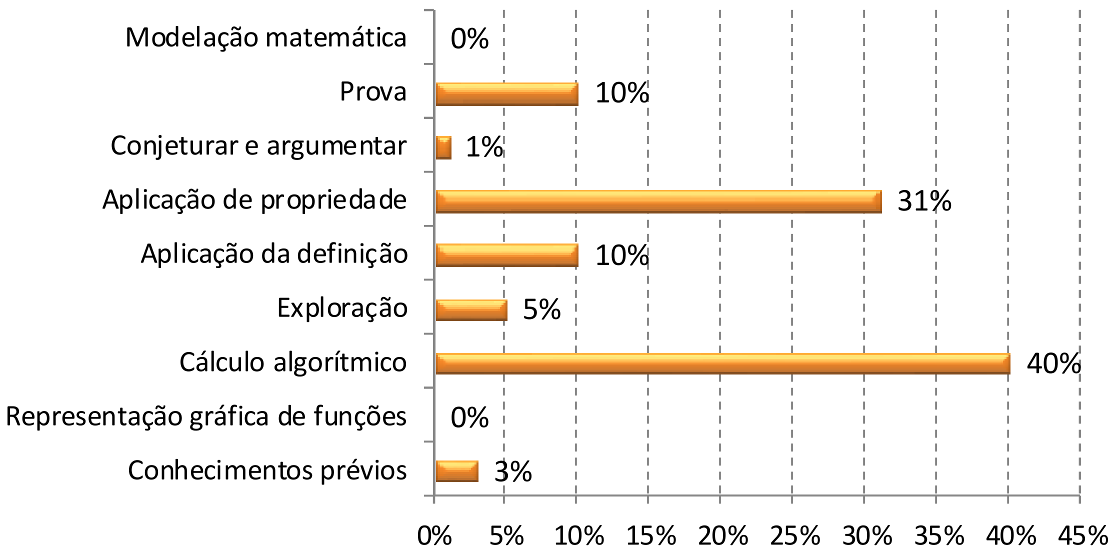


Figura 29 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M1

Em terceiro lugar surgem as tarefas de prova recorrendo ao método sintético ou analítico (10%) e aplicação da definição de função exponencial, logaritmo ou função logarítmica (10%). Este manual dá pouca relevância às tarefas de exploração com ou sem recurso à calculadora gráfica (5%). Dá também pouca relevância às tarefas de revisão de conhecimentos (3%), limitando-se a propor tarefas para determinar objetos e imagens de funções, resolver equações recorrendo à calculadora gráfica e determinar o termo geral de uma progressão geométrica. As situações propostas ao estudante para conjeturar e argumentar têm pouca expressão (1%). O manual M1 quase não propõe tarefas de representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas (apenas duas), nem apresenta situações de modelação matemática, em que o estudante tem de descobrir a expressão analítica da função que melhor traduz a situação descrita.

Tarefas propostas no manual M2

No manual M2 são muitíssimo valorizadas as tarefas de cálculo algorítmico (63%), como podemos verificar na figura 30.

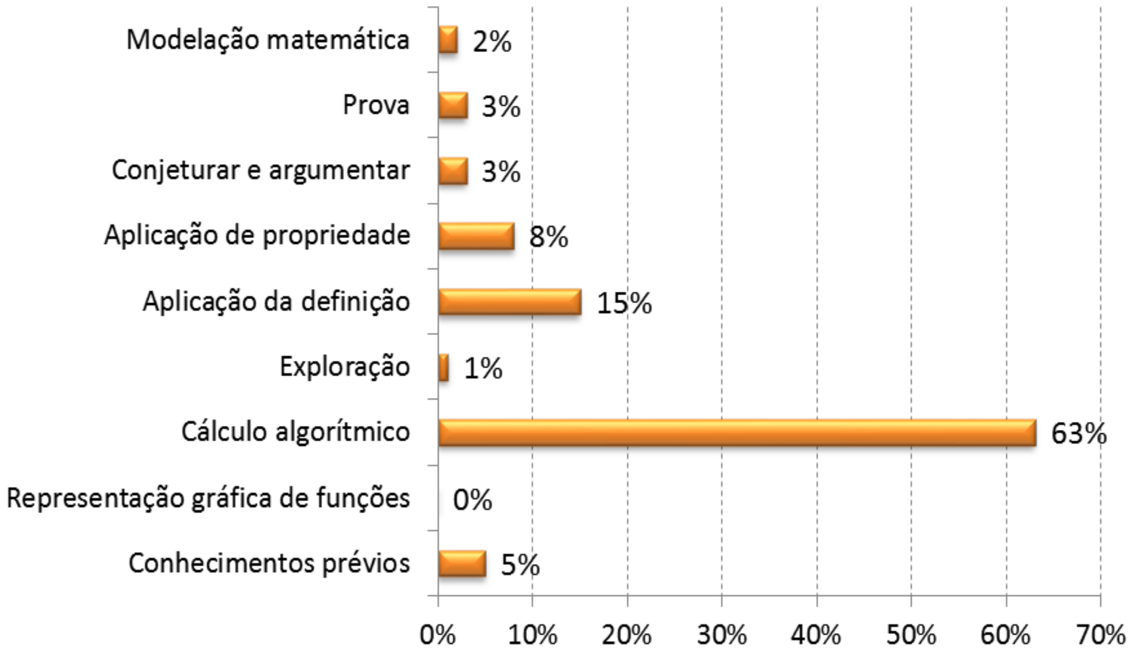


Figura 30 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M2

Em segundo lugar surgem, bastante distanciadas, as tarefas de aplicação da definição de função exponencial, logaritmo e função logarítmica (15%). Seguem-se as tarefas de aplicação de propriedade (8%). Este manual dá pouca relevância às tarefas de revisão de conhecimentos (5%), situações para conjeturar e argumentar (3%), de prova (3%) e de modelação matemática (2%). As tarefas de exploração com ou sem recurso à calculadora gráfica quase não têm expressão (1%). O manual M2 não propõe tarefas de representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas.

Tarefas propostas no manual M3

No que respeita à análise das tarefas matemáticas propostas, pelos autores do manual M3 ao estudante (figura 31), constata-se que são mais valorizadas as tarefas de cálculo algorítmico (41%) e aplicação de uma propriedade (20%).

Este manual dá mais relevância às tarefas de revisão de conhecimentos (14%) do que os anteriores, ao propor situações de transformações de gráficos de funções, assíntotas, representações gráficas de funções e aplicação das regras operatórias das potências.

Seguem-se as tarefas de aplicação da definição de função exponencial, logaritmo e função logarítmica (9%) e exploração com ou sem recurso à calculadora gráfica (6%). As tarefas de representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas, de prova e conjeturar/argumentar têm pouca expressão (3%). Por último, surgem as tarefas de modelação matemática, em que o estudante tem de encontrar o modelo que melhor se adapta à situação descrita (1%).

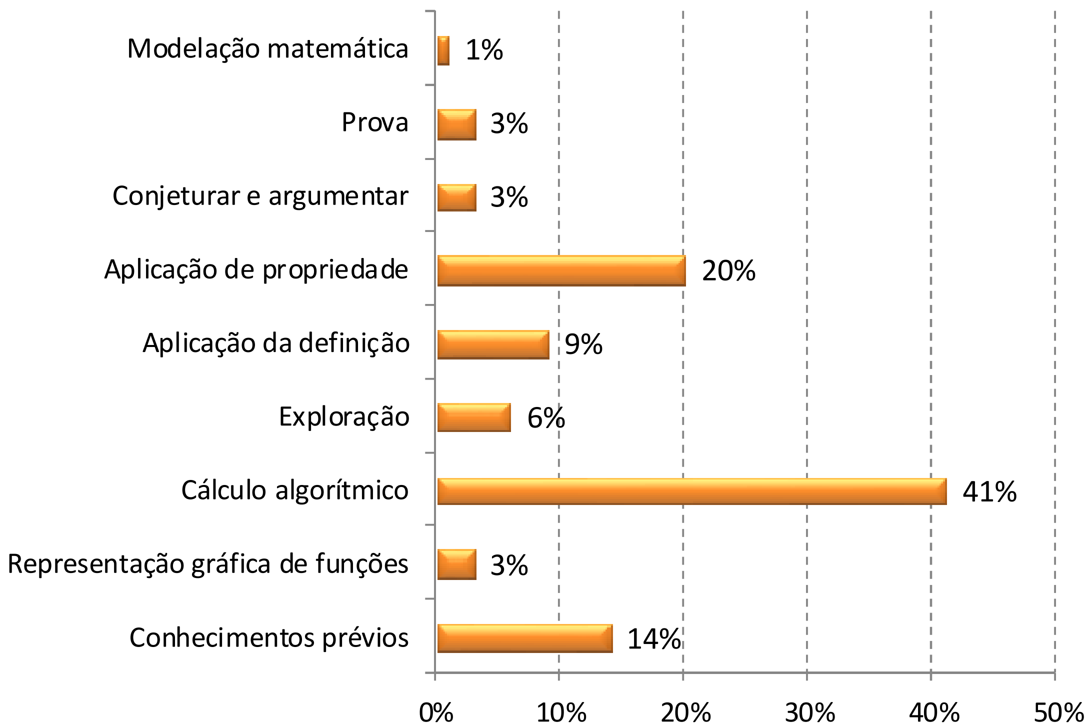


Figura 31 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M3

Tarefas propostas no manual M4

A maior parte das tarefas propostas no manual M4 são de cálculo algorítmico (49%). Seguem-se, muito distanciadas, as tarefas de aplicação de uma propriedade (18%), como por exemplo as regras operatórias das exponenciais ou dos logaritmos.

Este é o único manual que apresenta um teste de diagnóstico introdutório, com tarefas de revisão de conhecimentos (13%). Este teste permite ao estudante rever a função inversa, assíntotas, limites, regras operatórias das potências, monotonia, extremos, inequações envolvendo funções racionais, taxa média de variação e interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. Os manuais M3 e M4 são os que revelam maiores preocupações com a revisão de conhecimentos.

Seguem-se as tarefas de aplicação da definição de função exponencial, logaritmo e função logarítmica a par das tarefas de prova (5%). As tarefas de exploração com ou sem recurso à calculadora gráfica e de modelação matemática têm o mesmo valor percentual (3%). As situações com menor expressão são as de conjeturar/argumentar e as de representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas (2%), como se pode verificar na figura 32.

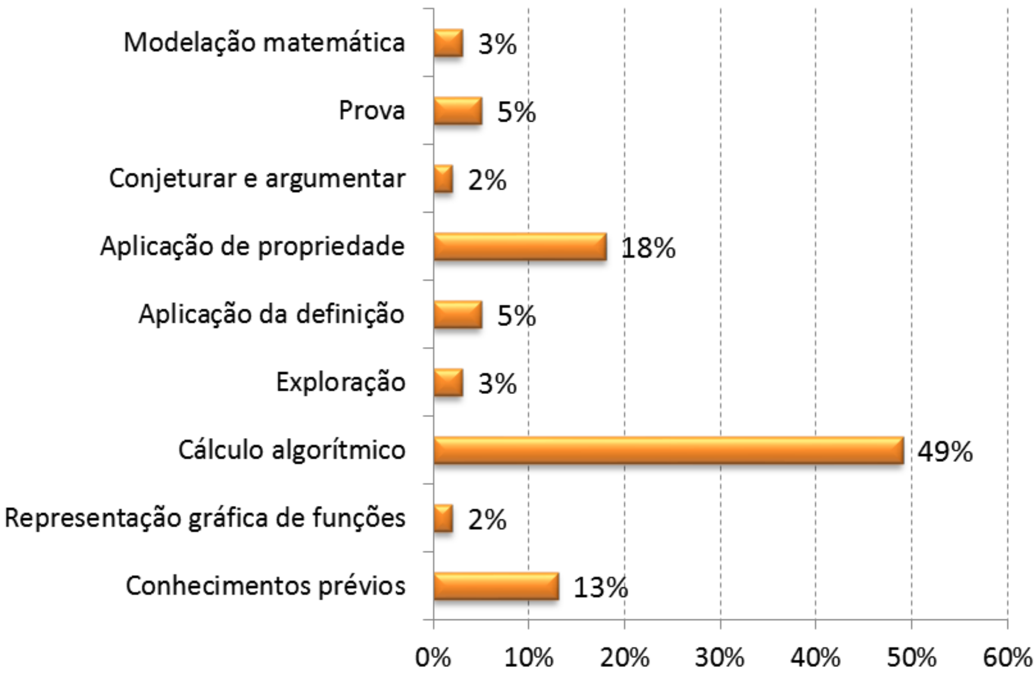


Figura 32 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M4

Tarefas propostas no manual M5

A análise do manual M5 (figura 33) permite-nos concluir, que são muito valorizadas as tarefas de cálculo algorítmico (57%).

Em segundo lugar, surgem distanciadas, as tarefas de aplicação de uma propriedade (21%), como por exemplo as regras operatórias das exponenciais ou das funções logarímicas (logaritmo do produto, do quociente, da potência e mudança de base), propriedades analíticas e gráficas das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, assíntotas, continuidade, monotonia, injetividade…), transformações de gráficos das funções exponenciais ou logarítmicas e limites.

Seguem-se, muito distanciadas das anteriores, as tarefas de prova (7%) e de aplicação da definição de função exponencial, função logarítmica e logaritmo (6%). Este manual dá pouca relevância às tarefas de revisão de conhecimentos, bem como à representação gráfica de funções (3%) e exploração (2%). As tarefas de modelação matemática quase não têm expressão (1%). O manual M5 não propõe ao estudante situações para conjeturar e argumentar.

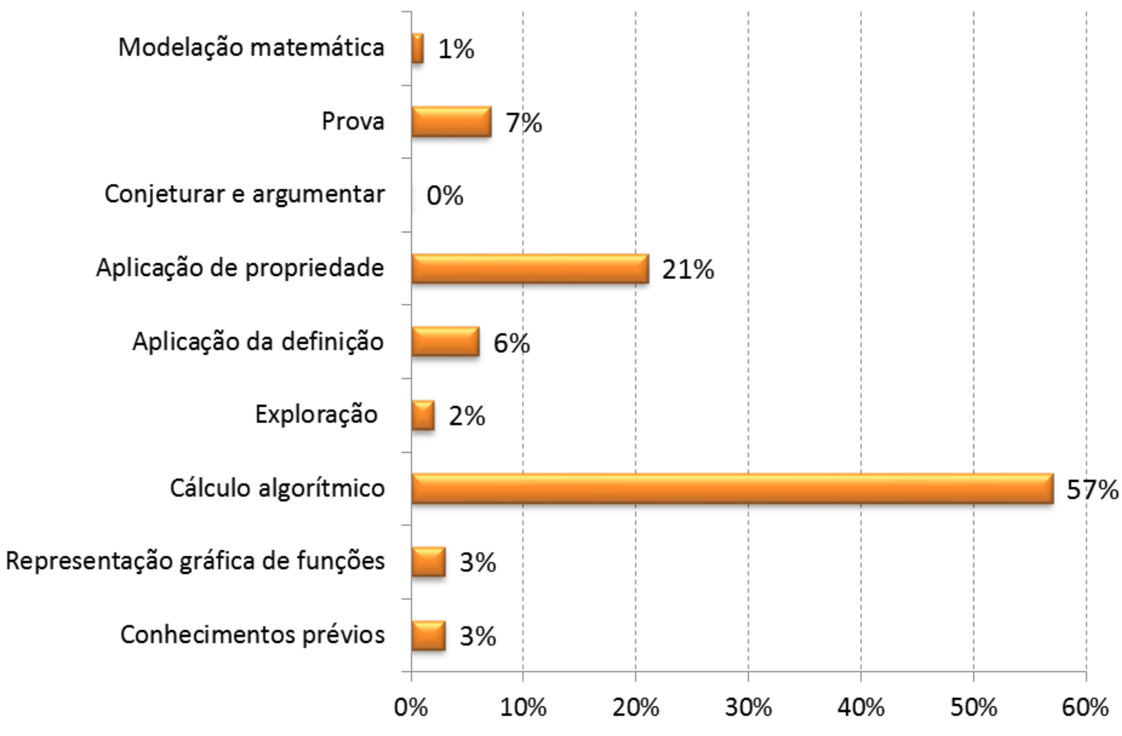


Figura 33 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M5

Tarefas propostas no manual M6

No manual M6 a maioria das tarefas propostas são de cálculo algorítmico (52%). Em segundo lugar, surgem as de aplicação de propriedade (27%), como por exemplo as regras operatórias das potências e dos logaritmos. Em terceiro lugar, muito destacadas das anteriores, aparecem as tarefas de aplicação da definição de função exponencial, logaritmo e função logarítmica (7%). Seguem-se as tarefas de prova (5%). Este manual dá pouca relevância às tarefas de revisão de conhecimentos (4%) e de exploração com ou sem recurso à calculadora gráfica (3%). As tarefas de representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas e de modelação matemática quase não têm expressão (1%). Este manual propõe ao estudante apenas uma situação que envolve conjeturar e argumentar (0%), como se pode verificar na figura 34.

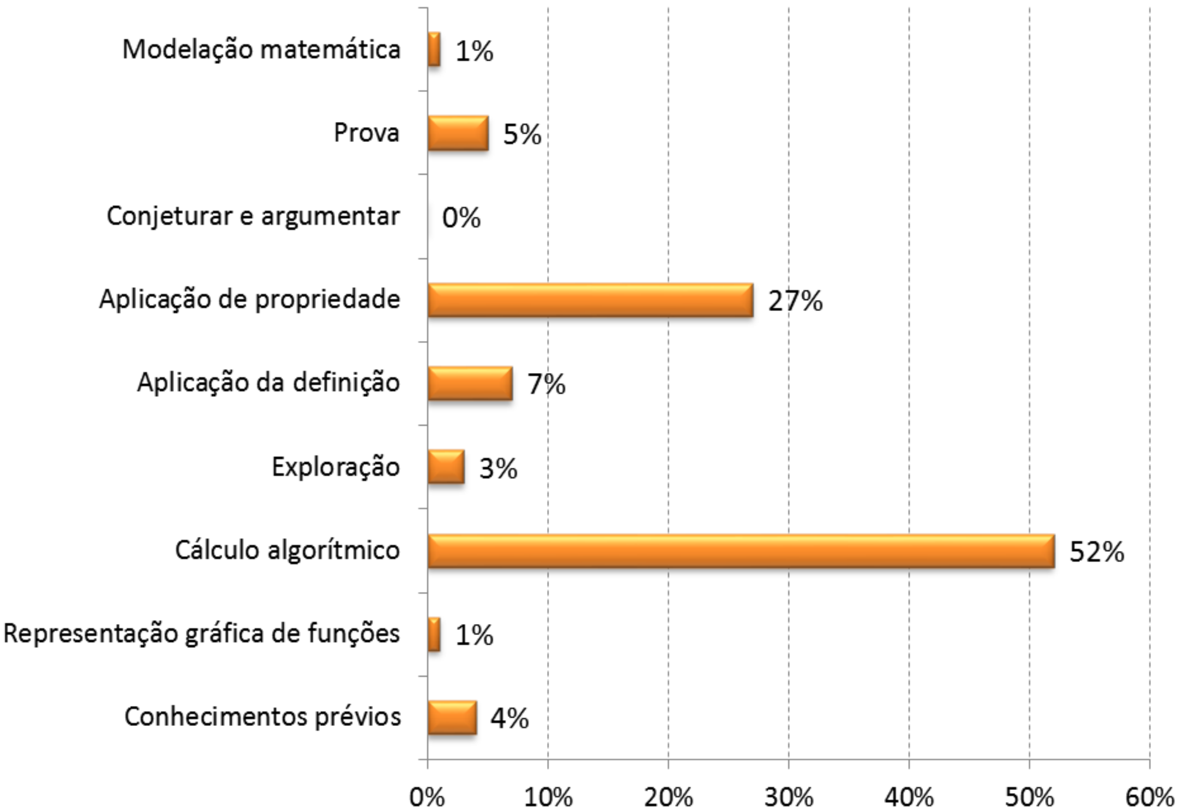


Figura 34 – Quantidade dos diferentes tipos de tarefas propostas no manual M6.

Após este estudo individualizado de cada manual, optou-se por apresentar uma visão global das tarefas propostas nos seis manuais na figura 35.

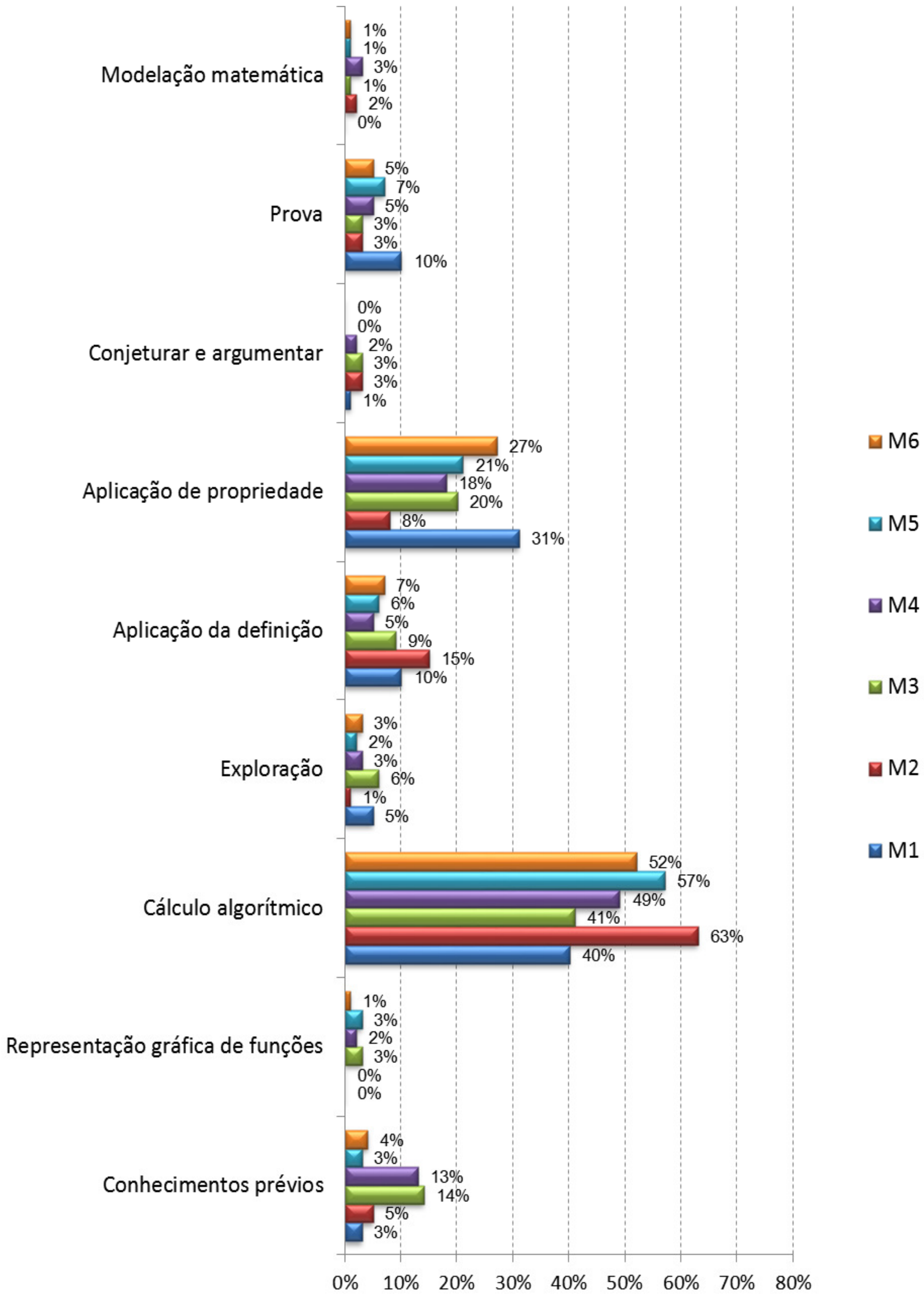


Figura 35 - Percentagens dos diferentes tipos de tarefas propostas nos seis manuais.

Como se pode observar na figura anterior, todos os manuais privilegiam as tarefas de cálculo algorítmico, seguidas das situações de aplicação de uma propriedade. As de aplicação da definição, conhecimentos prévios e prova têm alguma expressão. As tarefas de exploração, modelação matemática, conjeturar/argumentar e representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas, são as que têm menor relevância em todos os manuais.

Da análise efetuada concluiu-se que, em média, 50% das tarefas propostas, nos manuais escolares do 12.º ano de Matemática A, são de cálculo algorítmico; 21% são de aplicação de uma propriedade; 8% são tarefas para aplicar uma definição; 7% são de revisão de conhecimentos prévios; 6% são de prova; 3% são tarefas de exploração; 2% são de representação gráfica de funções; 2% são para conjeturar/argumentar; e 1% são tarefas de modelação matemática para o estudante descobrir o modelo que melhor traduz a situação descrita (figura 36).

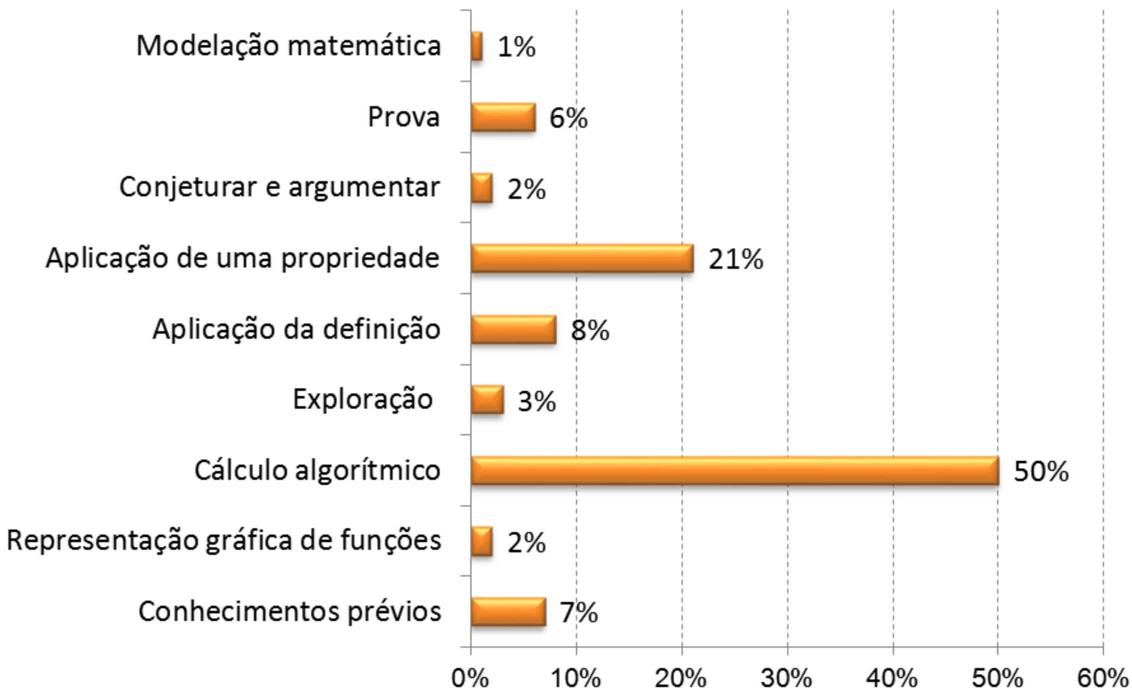


Figura 36 – Média das percentagens de cada tipo de tarefa nos seis manuais

De alertar para o facto que o manual M1 não apresenta tarefas de modelação matemática, em que o estudante tem de descobrir o modelo matemático que melhor traduz a situação descrita. O manual M2 não propõe a representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas. O manual M5 não propõe qualquer tarefa cuja resolução implique conjeturar e argumentar. Assim, conclui-se que relativamente a este tipo de tarefas, os manuais M1 e M5 não vão ao encontro das orientações curriculares para as funções exponenciais e logarítmicas.

4.3 Análise da adequação didática dos manuais escolares

Uma vez preenchidas as seis grelhas referentes à análise dos manuais, vamos proceder ao tratamento dos dados recolhidos, preenchendo os quadros referentes à análise da adequação epistémica, mediacional e ecológica nos manuais. Deste modo, pretendemos conciliar o quadro teórico da investigação, com as questões a que queremos dar resposta.

Análise da adequação epistémica

Na nossa investigação a adequação epistémica refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais pretendidos nos manuais, em relação ao significado de referência.

A análise dos indicadores da adequação epistémica de cada manual levou-nos a distinguir os manuais que apresentam situações para conjeturar e argumentar, dos que quase não apresentam situações desta natureza.

Assim, apresenta-se no quadro 15 a análise da adequação epistémica dos manuais M1, M2, M3 e M4 e, posteriormente, no quadro 16, a análise da adequação epistémica dos manuais M5 e M6.

Quadro 15 - Análise da adequação epistémica dos manuais M1, M2, M3 e M4

COMPONENTES	**Análise dos indicadores da adequação epistémica.** **Manuais: M1, M2, M3 e M4**
Situações-problema	- Apresenta uma amostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercitação e aplicação.

	- Propõe situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagens	- Usa diferentes modos de expressão matemática (verbal, algébrica, numérica, gráfica, simbólica, ...), traduções e conversões entre eles. - Propõe situações de expressão matemática e interpretação que permitem ao estudante usar as suas próprias representações para organizar, registar e comunicar ideias. - O nível de linguagem é apropriado para os estudantes em causa.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos, e estão adaptados ao nível de ensino a que se dirigem. - Apresentam os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível de ensino dado. - Propõe situações em que os estudantes têm de generalizar ou aplicar proposições, definições ou procedimentos.
Argumentos	- Favorece a argumentação e a prova dos enunciados e proposições matemáticas através de diversos tipos de argumentos e métodos de prova. - Apresenta situações em que os estudantes têm de conjeturar e argumentar. - As explicações, verificações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem.
Relações	- Estabelece conexões entre as ideias matemáticas – problemas, representações, conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos nas atividades de ampliação e de reforço no final do capítulo. - Os conteúdos matemáticos apresentam-se e estudam-se como um todo organizado. - Reconhece e aplica as ideias matemáticas em contextos não matemáticos.

No quadro anterior destaca-se o manual M1 que apresenta muitas situações de prova, no entanto, não apresenta situações de modelação matemática, em que o estudante tem de descobrir o modelo que melhor descreve a situação apresentada.

As tarefas para conjeturar e argumentar pretendem levar o estudante a prever um determinado resultado e apresentar um discurso lógico que o sustente. Estas tarefas revestem-se de especial importância para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e comunicação do estudante. No entanto, como vimos anteriormente, a quantidade de tarefas deste tipo propostas nos manuais é pouco significativa (2% em média).

Na figura 37 podemos verificar que, do total de tarefas para conjeturar e argumentar nos seis manuais, 41% são propostas pelo manual M3, 26% pelo manual M4, 15% pelo manual M1 tal como pelo M2 e 3% pelo M6. O manual M5 não propõe qualquer tipo de tarefa desta natureza.

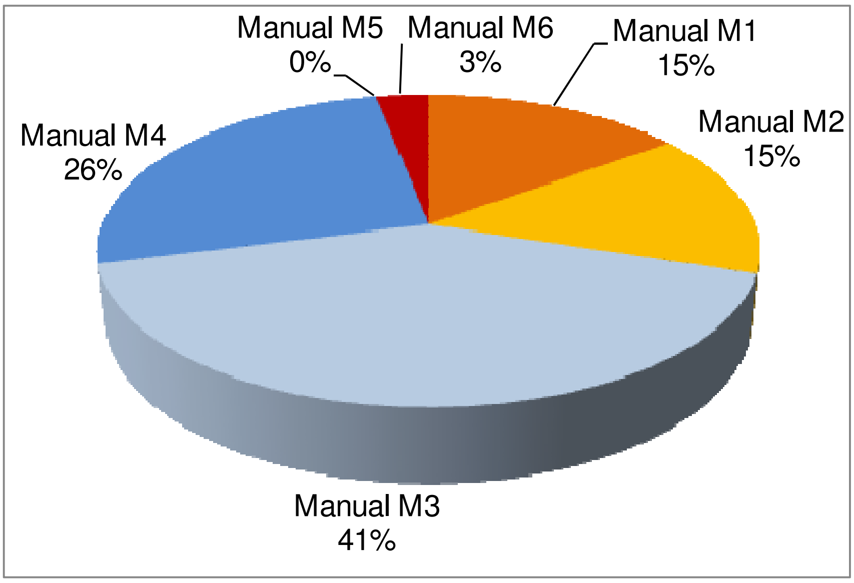


Figura 37 - Comparação das tarefas de conjeturar e argumentar

A análise da adequação epistémica dos manuais M5 e M6 (quadro 16) é em tudo semelhante à dos restantes manuais, com exceção da componente argumentos, uma vez que o manual M5 não apresenta tarefas em que os estudantes têm de conjeturar/argumentar e o manual M6 apresenta apenas uma.

Quadro 16 - Análise da adequação epistémica dos manuais M5 e M6

COMPONENTES	**Análise dos indicadores da adequação epistémica.** **Manuais: M5 e M6.**
Situações-problema	- Apresenta uma amostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercitação e aplicação. - Propõe situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagens	- Usa diferentes modos de expressão matemática (verbal, algébrica, numérica, gráfica, simbólica ...), traduções e conversões entre eles. - Propõe situações de expressão matemática e interpretação que permitem ao estudante usar as suas próprias representações para organizar, registar e comunicar ideias. - O nível de linguagem é apropriada para os estudantes em causa.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos, e estão adaptadas ao nível de ensino a que se dirigem. - Apresenta os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível de ensino dado. - Propõe situações em que os alunos têm de generalizar ou aplicar proposições, definições ou procedimentos.
Argumentos	- Favorece a argumentação e a prova dos enunciados e proposições matemáticas através de diversos tipos de argumentos e métodos de prova. **- Não apresenta tarefas em que os estudantes têm de conjeturar e argumentar (M5) ou apresenta apenas uma (M6).** - As explicações, verificações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem.
Relações	- Estabelece conexões entre as ideias matemáticas – problemas, representações, conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos nas atividades de ampliação e de reforço no final do capítulo. - Os conteúdos matemáticos apresentam-se e estudam-se como um todo organizado. - Reconhece e aplica as ideias matemáticas em contextos não matemáticos.

Na componente "situações-problema" da adequação epistémica, pretendemos destacar, para além das tarefas de conjetura e argumentação a que já fizemos referência, as tarefas de exploração, com ou sem recurso à calculadora.

As tarefas de exploração destinam-se a que o estudante selecione e utilize as ferramentas mais adequadas para a sua resolução com o objetivo de despertar o interesse e desenvolver o raciocínio, usando conhecimentos já adquiridos.

Como vimos anteriormente, na análise das situações propostas ao estudante pelos autores dos manuais, a quantidade deste tipo de tarefas é pouco significativa nos diversos manuais (3% em média), no entanto, revestem-se de especial importância para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio do estudante.

Na tabela 4, apresentada anteriormente, foi possível observar que os manuais M3 e M1 são os que propõem mais tarefas de exploração ao estudante. Além disso, do total de tarefas deste tipo que os seis manuais apresentam, 43% são propostas pelo manual M3, 23% pelo manual M1, 18% pelo manual M4, 9% pelo manual M6, 5% pelo manual M5 e 2% pelo manual M2 (figura 38).

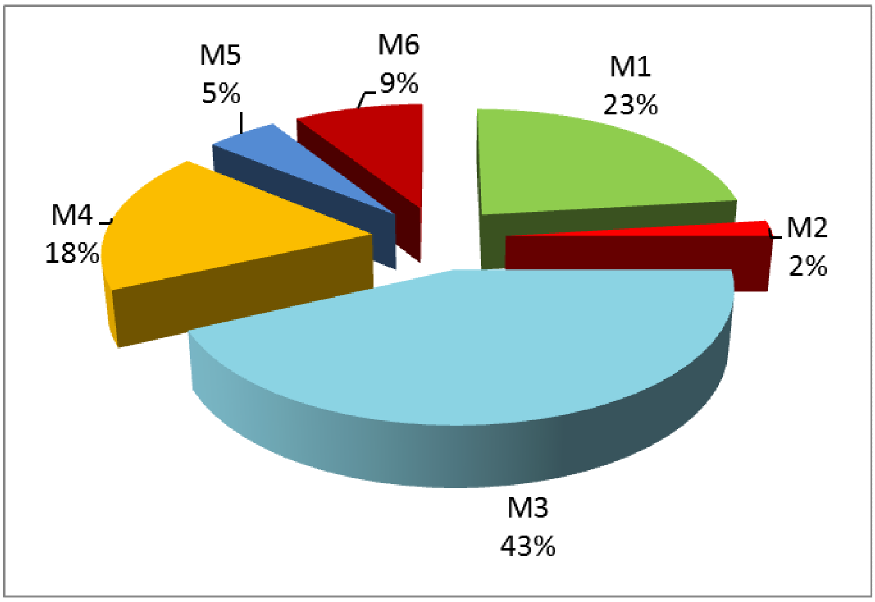


Figura 38 - Comparação das tarefas de exploração

Na componente "linguagens" um dos indicadores refere-se aos modos de expressão matemática, traduções e conversões entre eles. A figura 39 evidencia a utilização de várias formas de expressão nos manuais: linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, tabelar e gráfica.

1. Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Resolução

	(milhões de bactérias)
Ao fim de 1 dia	$1 + 0{,}5 = 1{,}5$
Ao fim de 2 dias	$1{,}5 + 0{,}5 \times 1{,}5 = 1{,}5\,(1 + 0{,}5) = 1{,}5^2$
Ao fim de 3 dias	$1{,}5^2 + 0{,}5 \times 1{,}5^2 = 1{,}5^2\,(1 + 0{,}5) = 1{,}5^3$
....	....
Ao fim de t dias	$1{,}5^t$

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial): $1{,}5^t$.

Já sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de t. Podemos supor que a massa de bactérias (biomassa) cresce de forma contínua com o tempo segundo esta lei. No início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante pode considerar-se $t < 0$.

A função exponencial:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$t \mapsto 1{,}5^t$$

exprime, em milhões, o número de bactérias existentes ao fim de t dias.
Trata-se de uma exponencial de base maior do que 1, sendo, portanto, uma função crescente; o número de bactérias não pára de aumentar com o decorrer do tempo.
De acordo com as propriedades que enunciámos, podemos também afirmar que $\lim_{t \to +\infty} 1{,}5^t = +\infty$ o que, no contexto da situação, significa que o número de bactérias ultrapassa qualquer valor, por maior que ele seja.
Vamos obter algumas imagens, recorrendo à calculadora, e esboçar o gráfico da função f.

t	$1{,}5^t$
−5	0,13
−3	0,30
−2,5	0,36
−1	0,67
0	1
0,5	1,22
1	1,50
1,5	1,84
2	2,25
2,5	2,76
3	3,38
5	7,59
6,5	13,95

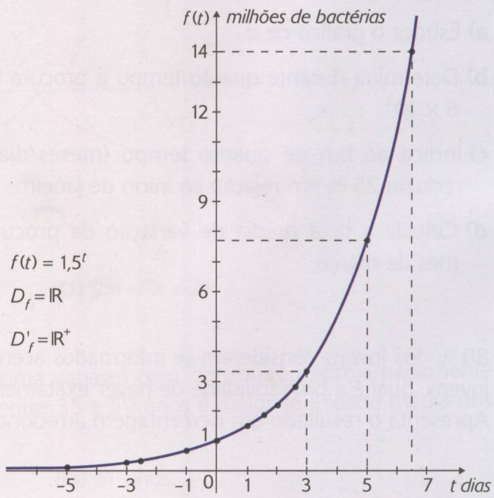


Figura 39 - Exemplo que ilustra o uso de vários tipos de linguagem

Na componente “argumentos” um dos indicadores refere-se à prova. Os manuais M1 e M4 são os que propõem mais tarefas desta natureza (ver tabela 4). Além disso, do total de tarefas de prova dos seis manuais, 33% são propostas pelo manual M1, 20% pelo manual M4, 16% pelo manual M5, 15% pelo manual M3, 11% pelo manual M6 e 5% pelo manual M2, como se pode observar na figura 40.

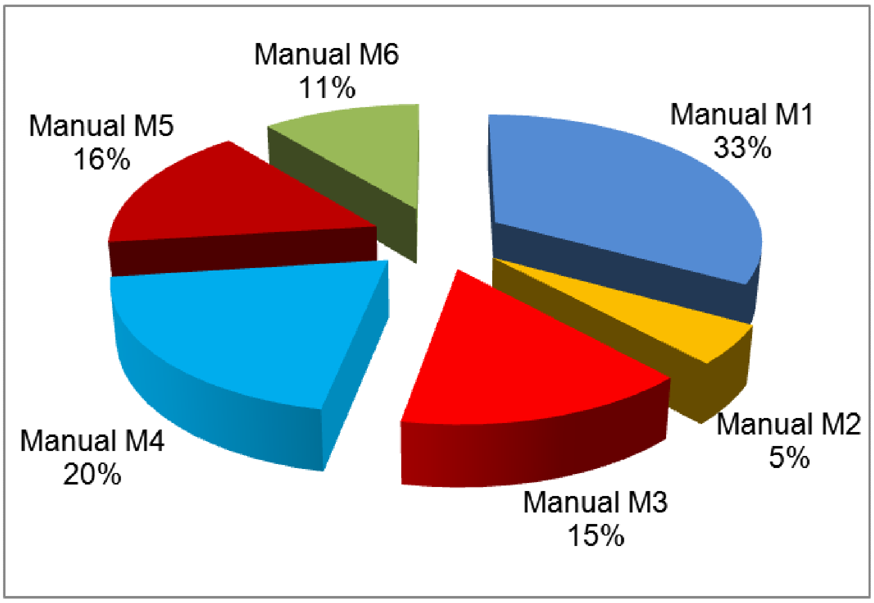


Figura 40 - Comparação das tarefas de prova

Os seis manuais escolares analisados caraterizam-se pela sua riqueza em tarefas de cálculo algorítmico, assim como inúmeras tarefas de aplicação de uma propriedade. Apresentam um número significativo de tarefas de prova, mas poucas situações para conjeturar, argumentar e de exploração.

Análise da adequação mediacional

A adequação mediacional, no nosso estudo, diz respeito ao grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais necessários, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Nesta análise distinguimos os manuais que apenas utilizam e propõem tarefas com recurso à calculadora gráfica (quadro 17), que é obrigatória, dos restantes (quadro 18).

Quadro 17 - Análise da adequação mediacional dos manuais M1, M2, M5

COMPONENTES	Análise dos indicadores de adequação mediacional. Manuais: M1, M2, M5.
Recursos materiais (Manipuláveis, calculadoras, computadores)	- Usa a calculadora gráfica para introduzir tarefas ricas, linguagens, procedimentos, argumentações adaptadas ao conteúdo pretendido. - As definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos concretos e visualizações.

Na análise da adequação mediacional distinguem-se os manuais M3, M4 e M6 uma vez que propõem a utilização de meios tecnológicos mais diversificados, como os sensores, a Internet e computador com software específico.

Quadro 18 - Análise da adequação mediacional dos manuais M3, M4 e M6

COMPONENTES	Análise dos indicadores de adequação mediacional. Manuais: M3, M4 e M6.
Recursos materiais (Manipuláveis, calculadoras, computadores)	- Usa a calculadora gráfica para introduzir tarefas ricas, linguagens, procedimentos, argumentações adaptadas ao conteúdo pretendido; propõe o uso de sensores; remete o estudante para sites na Internet; e computador com software Geogebra. - As definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos concretos e visualizações.

Análise da adequação ecológica

A adequação ecológica diz respeito ao grau em que o processo de estudo apresentado nos manuais se ajusta ao currículo.

Como referimos anteriormente, os manuais M1, M2 e M5 utilizam unicamente a calculadora gráfica (que é obrigatória) como recurso tecnológico. Além disso, estes manuais não propõem tarefas de investigação. Assim, na análise da adequação ecológica distinguimos os manuais M3, M4 e M6 (quadro 20) que propõem tarefas de investigação, dos restantes (quadro 19).

Quadro 19 - Análise da adequação ecológica dos manuais M1, M2 e M5

COMPONENTES	Análise dos indicadores de adequação ecológica. Manuais: M1, M2 e M5.
Adaptação dos manuais ao currículo	- Os conteúdos abordados nos manuais estão de acordo com o programa. - Faz a revisão de pré-requisitos indicados no programa.
Abertura para a inovação didática	- Não propõe atividades de investigação. - Integra novas tecnologias (calculadoras) em algumas tarefas propostas.
Adaptação sócio-profissional e cultural	- O conteúdo contribui para a formação sócio-profissional dos estudantes.
Educação em valores	- Promove o pensamento crítico.
Conexões intra e interdisciplinares	- Os conteúdos relacionam-se com outros conteúdos intra interdisciplinares, nomeadamente, da Física, Química, Biologia, Economia, Geografia, Sociologia e Ciências da saúde.

O manual M3 destaca-se por apresentar no final do tema "Cálculo diferencial II" atividades de investigação e curiosidades com recurso à calculadora gráfica, sensores (temperatura e som), computadores com software específico, livros e Internet. Também o manual M4 sugere tarefas de investigação no final do capítulo. O manual M6 sugere atividades de investigação com recurso à calculadora gráfica, computador com o software GeoGebra e ligação à Internet.

Quadro 20 - Análise da adequação ecológica dos manuais M3, M4 e M6

COMPONENTES	Análise dos indicadores de adequação ecológica. Manuais: M3, M4 e M6.
Adaptação dos manuais ao currículo	- Os conteúdos abordados nos manuais estão de acordo com o programa. - Faz a revisão de pré-requisitos indicados no programa.

Abertura para a inovação didática	**- Propõe atividades de investigação.** **- Integra novas tecnologias (calculadoras, sensores e computadores) em algumas tarefas propostas.**
Adaptação sócio-profissional e cultural	- O conteúdo contribui para a formação sócio-profissional dos estudantes.
Educação em valores	- Promove o pensamento crítico.
Conexões intra e interdisciplinares	- Os conteúdos relacionam-se com outros conteúdos intra e interdisciplinares, nomeadamente, da Física, Química, Biologia, Economia, Geografia, Sociologia e Ciências da saúde.

O programa de Matemática A apresenta como pré-requisitos as "Funções e Gráficos do 10.º ano" e a "Introdução ao Cálculo Diferencial I" do 11.º ano. Constata-se que todos os manuais propõem tarefas ao estudante para revisão de conhecimentos prévios necessários para as funções exponenciais e logarítmicas.

Segundo o princípio da aprendizagem enunciado pela NCTM (2008), os estudantes devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. De seguida, apresenta-se uma análise comparativa destas situações propostas nos diferentes manuais.

Os manuais M3 e M4 são os que apresentam uma revisão de conhecimentos mais completa. Como se pode observar na figura 41, de todas as tarefas de revisão dos conhecimentos prévios necessários para a aquisição dos conhecimentos emergentes, 47% são propostas pelo manual M3, 33% pelo manual M4, 6% pelo manual M1 tal como pelo M6 e 4% pelo manual M2 tal como pelo M5.

O manual M4 é o único que apresenta um teste de diagnóstico. O manual M5 apresenta o resumo das progressões aritméticas, progressões aritméticas e conceitos básicos de funções.

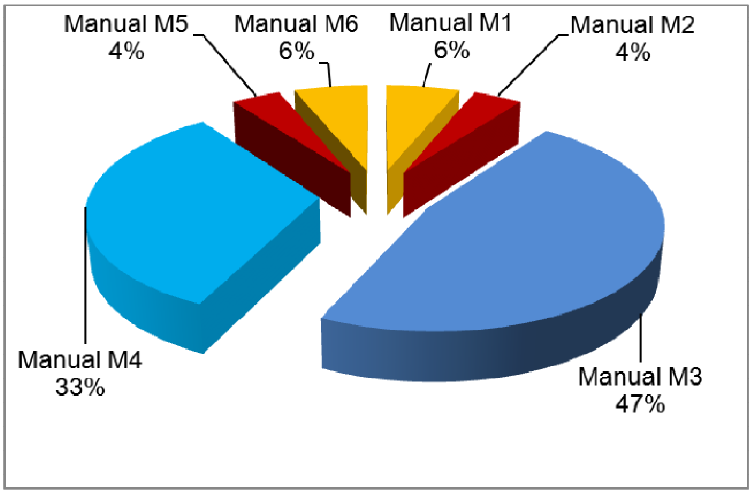


Figura 41 – Comparação das tarefas de revisão dos conhecimentos prévios

Como se pode observar na figura 42, todos os manuais apresentam tarefas que relacionam as funções exponenciais e logarítmicas com a vida real ou com outras ciências. O manual M4 é o que mais valoriza as conexões interdisciplinares, nomeadamente, com a Física, Química, Biologia, Economia, Geografia, Sociologia e Ciências da Saúde (28%). Um quarto das tarefas propostas pelo manual M5 têm esta natureza. Seguem-se os manuais M2 e M3 com 24% cada e o manual M1 com 22%. O manual M6 é o que menos relaciona a Matemática com situações da vida real ou de outras ciências (19%).

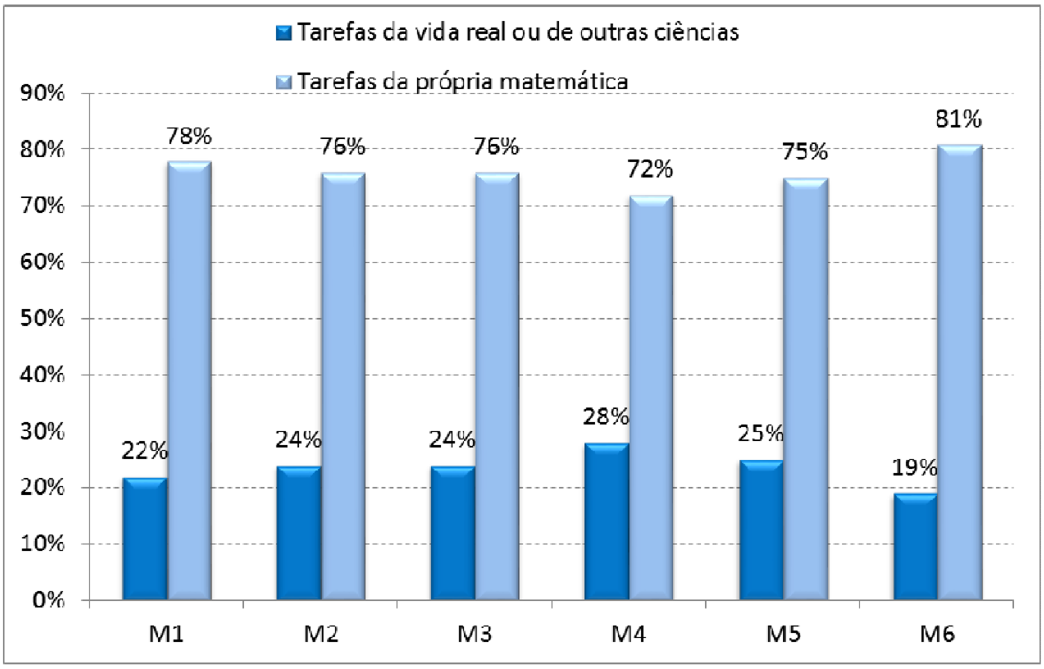


Figura 42 – Percentagem de tarefas da vida real ou de outras ciências

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Este último capítulo contém quatro secções. Na primeira é realizada uma síntese do estudo. Na segunda apresentam-se as respostas às questões de investigação. Na terceira descrevem-se as contribuições e limitações do estudo. Na última secção apresentam-se sugestões para futuras investigações.

5.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como finalidade analisar a abordagem didática das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares do 12.º ano de escolaridade. Neste sentido foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- Que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?
- Quais os conceitos, proposições e procedimentos utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?
- Que tipo de linguagem e argumentações são utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?
- Qual a adequação epistémica, mediacional e ecológica, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares?

Dada a importância indiscutível do manual escolar no processo de ensino-aprendizagem, a sua análise é imprescindível. Este instrumento é um elemento mediador entre o currículo e o professor, sendo, por isso, um guia de orientação para muitos docentes. Além disso, o manual pode favorecer a diversificação de atividades, a motivação do estudante e o seu trabalho autónomo.

No referencial teórico, abordaram-se alguns temas fundamentais que constituíram a base para o desenvolvimento deste estudo, em concreto, a perspetiva ontossemiótica de Godino (2008; 2012) como ferramenta de análise e reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, as orientações curriculares para as funções exponenciais e logarítmicas, tipo de tarefas a propor ao estudante e as competências a desenvolver, segundo as normas internacionais.

A presente investigação, faz uma análise documental dos seis manuais escolares portugueses de Matemática A do 12.º ano de escolaridade. O tópico analisado é o das funções exponenciais e logarítmicas, do tema "Introdução ao cálculo diferencial II". Em cada manual foram analisadas: (i) situações, (ii) linguagem, (iii) conceitos, (iv) proposições, (v) procedimentos e (vi) argumentações. Nas situações distinguiram-se as de introdução/motivação, exemplos resolvidos e tarefas propostas pelos autores para o estudante resolver. As tarefas propostas foram analisadas quanto ao tipo de resolução que suscitam. Identificamos o tipo de linguagem utilizada no manual (verbal, gráfica, algébrica, …). Analisamos se os conceitos são introduzidos mediante uma única definição e se esta é formal ou intuitiva. Nas proposições verificamos se a exposição é formal ou intuitiva, se as provam, justificam ou só as expõem e se as utilizam ou só as expõem sem mais referência. Quanto aos procedimentos analisamos se empregam vários para resolver a mesma situação ou somente um em cada caso, se justificam os procedimentos que propõem ou se os expõem como métodos rotineiros e se utilizam as novas tecnologias. Nas argumentações analisamos se utilizam uma prática discursiva para convencer o leitor da validade de determinadas proposições e o tipo de prova usada.

Na base da investigação estão algumas questões respeitantes à forma como são abordados os conceitos de função exponencial e logarítmica e como é feita a consolidação e sistematização de conhecimentos que daí advém, nos seis manuais. Tendo em conta a natureza das questões que impulsionam este estudo e a finalidade do mesmo, a abordagem realizada é de natureza qualitativa com base na análise documental. Foi elaborada uma grelha de análise para recolha dos dados dos manuais. No que diz respeito à técnica de análise de dados, foi utilizada a análise de conteúdo.

5.2. Respostas às questões de investigação

De seguida, apresentamos e discutimos os principais resultados obtidos no estudo, tendo por referência as questões de investigação e o quadro teórico do estudo.

5.2.1. Questão de investigação 1

Que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

No que refere às situações abordadas nos manuais, distinguimos as que se utilizam para introduzir/motivar para as funções exponenciais e logarítmicas, os exemplos/tarefas resolvidas que os autores apresentam para facilitar a compreensão do discurso matemático e ainda as tarefas que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conceitos matemáticos expostos, sejam eles relativos aos conhecimentos prévios ou aos emergentes.

Situações de introdução / motivação

Relativamente à forma como os autores introduzem as funções exponenciais e logarítmicas, todos os manuais apresentam pelo menos uma tarefa introdutória. Além disso, a maioria propõe situações alusivas à vida real ou a outras ciências, que não explora. São tarefas relacionadas com o tópico, que permitem ao estudante mobilizar conhecimentos prévios relacionados com os conhecimentos emergentes.

De facto, apenas o manual M2 propõe uma tarefa da própria matemática (que não resolve). O manual M3 coloca duas situações da vida real e o manual M6 começa com uma tarefa de outra ciência; os dois manuais não resolvem as tarefas que propõem. Os manuais M1, M4 e M5 colocam uma situação alusiva à vida real e uma de outras ciências. Destes, apenas o M5 apresenta uma proposta de resolução e o manual M4 resolve a tarefa alusiva a outras ciências.

Assim, relativamente às situações de introdução/motivação, todos os manuais vão ao encontro das recomendações do NCTM (2008, p. 395) quando refere que as tarefas de introdução devem "cativar os alunos para noções matemáticas importantes", despertar a sua curiosidade e envolvê-los na Matemática. Estas tarefas podem estar relacionadas com "experiências da realidade dos alunos, ou poderão surgir em contextos puramente matemáticos" (NCTM 2008, p. 19).

Os seis manuais analisados apresentam uma pequena nota histórica, focada no contributo de algum matemático ou economista para as funções exponenciais e logarítmicas. Destaca-se o manual M6 que, para além dessa referência, apresenta duas páginas com a história dos logaritmos. Todos os manuais se referem à história dos logaritmos e ao matemático John Neper, mas apenas os manuais M1 e M5 apresentam, também, uma nota histórica focada no contributo do economista Thomas Robert Malthus para as funções exponenciais.

Da análise efetuada, concluímos, que os manuais vão ao encontro das orientações do programa de Matemática A do Ensino Secundário para o tema transversal "História da Matemática", quando afirma " a referência à evolução de conceitos matemáticos ajudará os estudantes a apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo" (Silva et al., 2001, p. 20).

Exemplos / Tarefas resolvidas

Todos os manuais apresentam exemplos (tarefas resolvidas), depois do desenvolvimento teórico, para facilitar a compreensão do discurso matemático. Os exemplos ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas. Os exemplos têm uma resolução completa e formal, o que está de acordo com as diretrizes curriculares quando afirmam que "o grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos estudantes" (Silva et al., 2001, p. 11).

Tarefas propostas

Relativamente às tarefas que os autores propõem ao estudante, para aplicação de conhecimentos e consolidação da aprendizagem, todos os manuais têm tarefas de revisão dos conhecimentos prévios necessários à aquisição dos conhecimentos emergentes. Deste modo, os manuais promovem a revisão das "Funções e Gráficos do 10.º ano" e a "Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11.º ano", que são os pré-requisitos indicados no programa de Matemática A, para as funções exponenciais e logarítmicas. Refira-se, no entanto, que a maioria dos manuais apresenta um reduzido número de tarefas desta natureza.

Destacam-se os manuais M3 e M4, que apresentam uma significativa percentagem de tarefas de revisão (13% e 14%, respetivamente), sendo este último o único manual que tem um teste de diagnóstico. Como refere Schoenfeld (1988), citado pelo NCTM (2008, p.21), "a matemática faz mais sentido e é mais facilmente memorizada e aplicada, se os estudantes relacionarem o conhecimento novo com o conhecimento prévio, de forma significativa". Também, segundo o princípio da aprendizagem do NCTM (2008), para que os estudantes compreendam a Matemática é necessário partir da experiência e de conhecimentos prévios.

No que refere às tarefas que os autores dos manuais propõem ao estudante para aplicação dos conceitos matemáticos expostos que visam os conhecimentos emergentes, distinguimos se são de representação gráfica, cálculo algorítmico, exploração, aplicação de uma definição, aplicação de uma propriedade, conjeturar e argumentar, prova ou modelação matemática.

Da análise efetuada concluiu-se que o cálculo algorítmico é privilegiado em todos os manuais. Muito destacadas deste aparecem as tarefas de aplicação de uma propriedade. Seguem-se as de aplicação de uma definição e de prova em todos os manuais. As tarefas de exploração, representação gráfica de funções, conjeturar/argumentar e modelação matemática têm pouca expressão em todos os manuais.

A enfâse dos manuais escolares nas tarefas de cálculo algorítmico vai ao encontro das recomendações do Gave (2011, p. 53), que apresenta como proposta de intervenção didática "reforçar o cálculo algébrico" e do Gave (2012, p. 61), quando refere que os estudantes deverão ser incentivados a alcançarem "resultados de excelência" em itens que envolvam apenas conhecimentos ou aplicações rotineiras.

O programa de Matemática A do Ensino Secundário destaca a importância das tarefas a propôr ao estudante, as quais deverão "contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando-o a intuir, conjeturar, experimentar, provar e avaliar " (Silva et al., 2001, p. 10). Porém, os manuais investem pouco nas tarefas de exploração, conjetura e argumentação, pelo que esta orientação metodológica do Programa não parece estar a ser plenamente implementada. Também a segunda competência de Niss (resolução de problemas) não está a ser devidamente promovida, uma vez que apenas um reduzido número de tarefas propostas nos manuais envolvem destrezas não rotineiras na sua resolução.

As indicações metodológicas do programa referem que a modelação, com funções exponenciais e logarítmicas, pode ser feita "usando as capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados)" (Silva et al., 2002, p. 4). Além disso, "recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores" (Silva et al., 2001, p. 15). Também o Gave (2011, p. 53) apresenta como proposta de intervenção didática,

> "reforçar a utilização da calculadora gráfica, diversificando estratégias de forma a otimizar as suas potencialidades e a desenvolver nos alunos a capacidade de analisar e interpretar os dados por ela gerados ".

Constata-se que estas indicações não estão a ser totalmente implementada nos manuais, tal como a terceira competência de Niss (modelação) não está a ser plenamente desenvolvida, uma vez que os manuais quase não propõem tarefas desta natureza.

A este respeito, o NCTM (2008, p. 360) refere que os estudantes deverão "estudar a modelação com maior profundidade, gerando ou utilizando dados" e salienta que "o facto de serem os próprios alunos a gerar os dados contribui para estimular o interesse pela criação de modelos matemáticos". O manual M4 é o que propõe mais tarefas para o estudante descobrir qual o modelo que melhor se adapta à situação descrita (3%), enquanto o M1 não apresenta qualquer situação deste tipo.

Uma das orientações curriculares para as funções exponenciais e logarítmicas é a "análise de situações da vida real" (Teixeira et al. 1999). Constata-se que, cerca de um quarto das tarefas que são propostas nos manuais estabelecem conexões interdisciplinares, nomeadamente, com situações da vida real ou de outras ciências como a Física, Química, Biologia, Economia, Geografia, Sociologia ou as Ciências da Saúde. Esta situação vai ao encontro do programa de Matemática A quando afirma que o professor deve utilizar situações de outras disciplinas e à norma do NCTM (2008) para as conexões no ensino da Matemática, quando refere que os estudantes devem "reconhecer e aplicar matemática em contextos exteriores a ela própria" (NCTM, 2008, p.416).

5.2.2. Questão de investigação 2

Quais os conceitos, proposições e procedimentos utilizados, nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

Os **conceitos** de função exponencial, logaritmo e função logarítmica, são introduzidos mediante uma definição formal.

As **proposições** apresentadas são: propriedades das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, assíntotas, continuidade, injetividade, paridade…); transformações de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas; regras operatórias das funções exponenciais e dos logaritmos; crescimento das funções exponenciais e logarítmicas; função logarítmica como inversa da exponencial; limites: $\lim_{x\to+\infty} a^x$; $\lim_{x\to-\infty} a^x$; $\lim_{x\to 0^+} \log_a x$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}$, $a>1, p \in IR$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x}$, $a>1$.

A exposição das proposições é formal. Todos os manuais provam as regras operatórias dos logaritmos. Os limites notáveis e as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas são justificados de forma intuitiva. As restantes propriedades só se expõem. Geralmente, as proposições são aplicadas através de exemplos após o enunciado.

Os **procedimentos** propostos nos manuais são: determinar objetos, imagens, domínio e contradomínio de funções exponenciais e logarítmicas; investigar a influência de parâmetros em famílias de funções exponenciais ou logarítmicas e reconhecer as suas consequências gráficas; caracterizar a função inversa; comparar o crescimento exponencial e logarítmico com o da potência; aplicar as regras operatórias das potências e dos logaritmos; resolver equações e inequações; determinar limites; realizar demonstrações dedutivas.

Utilizam vários procedimentos para resolver a mesma situação, embora predomine o analítico. Os manuais justificam os procedimentos que propõem, exceto o manual M1 que expõe as equações e inequações envolvendo logaritmos como métodos rotineiros.

Usam a calculadora gráfica para ajudar a resolver algumas tarefas, o que permite desenvolver a oitava competência de Niss (instrumentos e recursos) e vai ao encontro do espírito do programa de Matemática A do Ensino Secundário quando refere, que o uso da calculadora não se deve reduzir a um instrumento de cálculo mas também como "meio incentivador do espírito de pesquisa" (Silva et al., 2001, p. 15). Há vantagem em que se explore com a calculadora gráfica atividades de modelação, simulação e resolução de situações problemáticas. No entanto, considera-se que esta competência não está a ser plenamente promovida pelos manuais, que recorrem quase exclusivamente à calculadora gráfica em detrimento de outros recursos e ferramentas tecnológicas. Apenas o manual M3 propõe uma atividade de investigação com sensores. O manual M4 remete o estudante para sites da Internet e o M6 propõe uma atividade que utiliza o computador com software Geogebra e outra que usa a Internet.

5.2.3. Questão de investigação 3

Que tipo de linguagem e argumentações são utilizados, nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?

Utilizam a **linguagem** verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos, o que promove a quinta competência de Niss (representação) ao serem utilizadas diferentes representações de entidades matemáticas. Também vai ao encontro da norma "representação" do NCTM (2008, p. 425) que refere a importância de "aprender a utilizar a linguagem, as convenções e as representações da matemática". Os estudantes "Devem criar e utilizar representações tabelares, simbólicas, gráficas e verbais" para compreender as funções exponenciais e logarítmicas (NCTM 2008, p. 353).

Na exposição dos conteúdos, os manuais recorrem à linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...). Esta situação permite desenvolver a sexta competência de Niss (simbolismo e formalismo) que compreende ser capaz de interpretar e descodificar a linguagem simbólica e formal. Também o NCTM (2008, p. 357) afirma que "a destreza com o simbolismo algébrico auxilia os alunos a representar e resolver problemas em diversas áreas do currículo".

No que refere às **argumentações**, todos os manuais apresentam um discurso em linguagem natural, para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização. O que vai ao encontro da primeira competência de Niss (pensamento matemático) quando refere, que o estudante deve " abstrair conceitos, generalizando resultados". Também permite desenvolver a sétima competência de Niss (comunicação) uma vez que o estudante tem de descodificar e interpretar os textos dos manuais.

De acordo com o programa de Matemática A do Ensino Secundário é absolutamente necessário que as tarefas tenham em conta a "correção da comunicação oral e escrita" (Silva et al., 2001, p. 11). O estudante deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese.

Utilizam quase exclusivamente os métodos de prova sintético ou analítico, pelo que não está a ser plenamente explorada a quarta competência de Niss (raciocínio matemático), que refere um leque mais abrangente e diversificado de provas matemáticas.

Segundo o NCTM (2008, p. 342), é necessário que os estudantes "desenvolvam capacidades de justificação de causas, demonstração de conjeturas e utilização de símbolos no raciocínio". Na norma do "raciocínio e demonstração" o NCTM (2008, p. 404) afirma, a necessidade de o estudante "desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas" e refere que o estudante deve saber usar a técnica de indução matemática (p. 408). A este respeito apenas o manual M1 propõe ao estudante uma tarefa de aplicação desta técnica.

5.2.4. Questão de investigação 4

Qual a adequação epistémica, mediacional e ecológica, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares?

A adequação epistémica, mediacional e ecológica (Godino, Rivas e Arteaga, 2012), não são observáveis diretamente e, por essa razão, é necessário inferi-la a partir dos indicadores empíricos apresentados no capítulo quatro desta investigação.

Em relação à **adequação epistémica** das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares, considera-se que há adequação, tendo em conta os indicadores dos quadros 15 e 16 do capítulo 4. Nesta apreciação destacam-se alguns aspetos.

Um primeiro aspeto diz respeito às situações-problema apresentadas. Todos os manuais propõem uma amostra representativa e articulada de tarefas que varia entre 177 (no manual M2) e 607 (no manual M3). Nas tarefas propostas aos estudantes, constata-se a enfâse no cálculo algorítmico e a baixa percentagem de tarefas de conjeturar, argumentar, exploração e modelação matemática, em que o estudante tem de descobrir o modelo que melhor traduz a situação descrita.

A linguagem utilizada nos manuais é adequada aos estudantes do 12.º ano. Os manuais usam diferentes formas de expressão, embora predomine a linguagem natural, a algébrica e a gráfica. Esta situação decorre do facto de as formas de representação de funções privilegiadas em todos os manuais serem a algébrica e a gráfica.

Os manuais apresentam as definições, proposições e procedimentos fundamentais do tópico das funções exponenciais e logarítmicas de forma clara, correta e adequadas aos estudantes. Na exposição dos conteúdos partem de situações concretas da própria matemática para a generalização. Alguns manuais propõem ao estudante situações que o levam a intuir as propriedades que vão ser enunciadas a seguir, deste modo o estudante tem uma participação mais ativa na construção do seu próprio conhecimento. Todos os manuais apresentam situações resolvidas que ilustram procedimentos e a apresentação correta do texto escrito. Nas margens, propõem ao estudante situações de exercitação e aplicação imediata das proposições, definições ou procedimentos. Todos os manuais apresentam um elevado número de tarefas desta natureza.

No que refere à argumentação, os manuais apresentam um discurso em linguagem natural para convencer o estudante de determinadas propriedades, partindo de exemplos concretos para a generalização. Propõem uma baixa percentagem de tarefas de conjeturar sobre relações matemáticas, argumentar e de exploração o que não favorece a investigação, justificação e argumentação. Destacam-se, pela negativa, o manual M5 que não apresenta qualquer tarefa de conjetura e argumentação e o manual M6 que propõe apenas uma. Os manuais provam apenas as regras operatórias dos logaritmos e propõem uma percentagem significativa (6%) de situações de prova ao estudante usando dois métodos (sintético ou analítico). Apenas um manual (M1) propõe uma tarefa com o método de indução matemática. Os argumentos utilizados estão de acordo com o nível dos estudantes do 12.º ano.

Os manuais relacionam as funções exponenciais e logarítmicas com outros temas da Matemática (como a Geometria), com situações da vida real ou de outras ciências. Introduzem as funções exponenciais e logarítmicas com situações quase exclusivamente da vida real ou de outras ciências, que permitem relacionar conhecimentos prévios com conhecimentos emergentes. Alguns manuais intercalam a exposição dos conteúdos com tarefas ricas que apresentam conexões com outros temas da Matemática ou a outras áreas. Todos os manuais apresentam, no final das funções exponenciais e logarítmicas, uma amostra representativa de situações que estabelecem conexões entre representações, conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos, que visam a consolidação de conhecimentos. Das situações propostas nos manuais, cerca de um quarto são para o estudante reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos.

No que refere à **adequação mediacional** verifica-se que metade dos manuais usam exclusivamente a calculadora gráfica para explorar os diferentes tipos de situações. Para além disto, os manuais M3, M4 e M6 propõem meios tecnológicos mais diversificados, como os sensores, Internet e computador com software específico (em número muito reduzido). Todos os manuais ensinam a trabalhar com os logaritmos na calculadora. Os manuais recorrem à calculadora gráfica para introduzir tarefas ricas, linguagens, procedimentos e argumentos adaptados ao conteúdo em estudo. Na exposição de propriedades, como os limites envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, alguns manuais utilizam a calculadora gráfica, não só para visualizar a representação gráfica das funções, mas também para ter acesso a tabelas de valores. Assim, podemos inferir que há adequação mediacional das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares.

No que respeita à **adequação ecológica**, pela análise dos quadros 19 e 20 do capítulo 4, conclui-se que há adequação. Com efeito, constata-se que, relativamente aos conteúdos abordados e às conexões intra e interdisciplinares, os manuais estão de acordo com as diretrizes do currículo de Matemática do Ensino Secundário. Cerca de 25% das situações propostas ao estudante nos manuais têm ligações à vida real ou à Física, Química, Biologia, Economia, Geografia, Sociologia, Ciências da Saúde, etc.

No entanto, os manuais quase não apresentam tarefas em que o estudante tem de descobrir o modelo matemático que melhor se ajusta à situação descrita, pelo que não está a ser plenamente implementada uma das sugestões metodológicas do programa de Matemática A do 12.º ano. Também a reduzida percentagem de tarefas de exploração (3%) e de conjeturar/argumentar (2%) permite-nos concluir que as orientações do programa de Matemática A do Ensino Secundário não estão a ser plenamente implementadas nos manuais escolares. Os manuais apresentam diversas tarefas que estão na brochura de funções de apoio ao programa do 12.º ano bem como do NCTM (2008). Todos os manuais apresentam uma nota histórica focada no contributo de algum matemático para as funções exponenciais e logarítmicas, porém, apenas o manual M6 inclui a história dos logaritmos.

Refira-se também que os manuais M1, M2 e M5 têm uma baixa abertura para a inovação didática, uma vez que não propõem atividades de investigação e o único recurso tecnológico que utilizam são as calculadoras gráficas. As novas tecnologias são uma ferramenta essencial para a aprendizagem. Segundo o NCTM (2008, p. 27), o seu uso "enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspetivas".

Ao recorrerem às novas tecnologias os manuais promovem a formação sócio-profissional do estudante. Esta posição é defendida pelo NCTM (2008, p. 343), quando refere, que "a enfâse atribuída à aquisição de competências tecnológicas, resultará numa maior capacidade de adaptação a ambientes de trabalho cada vez mais tecnológicos, com que os alunos se depararão futuramente". Posição semelhante é assumida pelos autores do programa ao afirmarem que o recurso à tecnologia pode preparar os estudantes para "usar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico" (Silva et al., 2001, p. 22).

Os manuais escolares promovem o espírito crítico por via das tarefas em que o estudante tem de usar a calculadora gráfica, o computador ou outro recurso tecnológico. Nestas situações, o estudante deverá descrever com cuidado as propriedades constatadas e justificar devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados.

No entanto, no capítulo quatro concluímos que todos os manuais privilegiam o cálculo algorítmico, em detrimento de tarefas de exploração, conjetura e argumentação. Por sua vez, no quadro teórico, quando apresentamos os indicadores de adequação ecológica, explicitamos que a matemática reduzida a meros cálculos rotineiros pode reforçar atitudes passivas e complacentes em vez de desenvolver o pensamento crítico e alternativo. Deste modo, a enfâse de todos os manuais no cálculo algorítmico é um obstáculo para a promoção do pensamento crítico, o que contraria o espírito do programa de Matemática do Ensino Secundário, que refere a importância de desenvolver "o espírito crítico e a criatividade" (Silva et al., 2001, p.3).

5.3. Contribuições e limitações

Pensamos poder contribuir, com esta investigação, não só para o enriquecimento da minha formação pessoal e profissional, mas também para a melhoria da qualidade do ensino que desenvolvo e do recurso didático mais usado na escola, o qual contribui em muito para a formação do estudante.

Julgamos que a nossa investigação é atual, não só pela temática, mas também pela metodologia de análise utilizada nos manuais, dado que as investigações sobre este tópico são escassas. A metodologia de análise mostrou-se, também, produtiva para o desenvolvimento da nossa investigação.

A metodologia implementada na análise dos manuais, semelhante à utilizada na análise de livros de texto de outros trabalhos de investigação, baseia-se em elementos teóricos propostos pelo enfoque ontossemiótico e tem-se mostrado muito produtiva para analisar o processo de ensino, podendo ser utilizada para estudar outras noções. A grelha de análise por nós utilizada permitiu-nos dar resposta às nossas questões de investigação.

Outro contributo vem da aplicação dos critérios de adequação didática, que nos deram elementos para analisar os manuais do 12.º ano e identificar, de acordo com esta análise, pontos em que os manuais não estão em absoluta sintonia com as normas curriculares. Ao tomarmos consciência das fragilidades dos manuais podemos agir no sentido de as colmatar, a fim de melhorar o ensino das funções exponenciais e logarítmicas.

Os manuais escolares devem contemplar tipos mais diversificados de tarefas, de forma a propiciar o desenvolvimento das competências previstas para o Ensino Secundário. Seria importante que apresentassem um maior número de tarefas de exploração, conjetura, argumentação e modelação matemática. Uma vez que o manual escolar é, segundo alguns estudos, o recurso privilegiado pelos professores, as alterações nos manuais escolares poderiam ajudar na mudança das práticas destes e consequentemente no ensino da Matemática.

Na introdução do nosso trabalho fizemos referência a diversos estudos que tiveram como campo investigativo os manuais escolares. A diversidade de trabalhos nesta área leva-nos a concluir que a educação matemática começou desde há algum tempo a problematizar os manuais escolares, colocando questões e suscitando reflexões que podem contribuir para uma melhoria dos processos de conceção e de utilização deste material didático. Esperamos com o nosso trabalho dar também um contributo nesse sentido.

Julgamos que este estudo poderá ser importante para mostrar como são apresentadas as funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares do 12.º ano e identificar pontos que podem ser melhorados. Além disso, o estudo poderá fornecer argumentos aos professores para uma melhor escolha dos manuais escolares, com base numa análise mais crítica e reflexiva.

Uma das limitações da nossa investigação é apenas analisar, em todos os manuais, um tópico do programa do 12.º ano de escolaridade. Esta situação decorre do curto período de tempo em que a investigação foi desenvolvida.

Outra limitação é a subjetividade do investigador. O facto da natureza do estudo ser qualitativa e a técnica de recolha de dados ser a análise documental, torna possível a interferência do investigador e alguma subjetividade associada à análise de conteúdo dos documentos.

5.4. Sugestões para futuras investigações

O estudo que aqui se apresenta poderá contribuir para futuras investigações na área da Matemática e da conceção de manuais escolares de Matemática.

Numa futura investigação poderiam ser concebidos recursos didáticos que complementassem ou substituíssem as tarefas onde foram verificadas mais lacunas nos manuais.

Futuros estudos poderão ter em conta outros elementos que no presente trabalho não foram considerados. Uma análise possível poderá envolver a totalidade dos temas dos manuais escolares do 12.º ano de escolaridade, podendo conduzir a uma análise comparativa bastante rica. Também seria interessante investigar a adequação cognitiva, emocional e interacional que não foram contempladas neste estudo.

Um outro tema poderia ser investigar as variáveis que entram na equação da adoção de manuais escolares, uma vez que são tantas que certamente só esse tema seria interessante para estudo.

Por último, salientamos a necessidade de se continuar a aprofundar o trabalho de investigação e desenvolvimento de instrumentos e metodologias de avaliação de manuais escolares de Matemática, de modo a dotar os professores dos meios necessários à realização de decisões informadas no momento da adoção e apoiá-los no efetivo uso destes importantes instrumentos de trabalho no seu dia a dia profissional.

Referências Bibliográficas

Abreu, M. (2011). *Compêndio de matemática de Sebastião e Silva: cálculo diferencial*. Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro.

Alarcão, I. (2001). Novas tendências nos paradigmas de investigação em educação. In I. Alarcão (Org.), *Escola reflexiva e nova racionalidade.* Porto Alegre: Artmed, (pp.135-144).

Andrade, C., Pereira, P. P., Viegas, C., & Pimenta, P. (2012). *Ípsilon - Matemática A 12º Ano*. Lisboa: Texto Editores.

APM (1998). Matemática 2001: *Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de professores de Matemática.

Bardin, L. (2004). *Análise de Conteúdo*. (3ª ed.) Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Boston, M., & Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(9), 532-538.

Cabrita, I. (1996). A proporcionalidade direta à luz dos manuais escolares. In Comissão Organizadora (Ed.), *Atas do SIEM VI - Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 95-128). Lisboa: APM.

Cabrita, I. (1997). *Resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade: desempenhos e perspetivas didáticas de futuros professores de Matemática.* In Fernandes, D., Lester, Jr., F., Borralho. A., V. (1997). *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática.* Aveiro. GIRP (pp. 71-98)

Cabrita, I. (1999). Utilização do manual escolar pelo professor de Matemática. In R. V. Castro, A. Rodrigues, J. L. Silva, & M. L. D. Sousa (Eds.), *Manuais escolares: Estatuto, funções, história* (I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares) (pp. 35-56). Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Chizzotti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. *Revista Portuguesa de Educação, 16*(2), 221 – 236. Retrieved from http://redalyc.uaemex.mx/pdf/374/37416210.pdf

CNE (2006). Parecer sobre proposta de lei relativa ao Sistema de Avaliação dos Manuais Escolares para os Ensinos Básico e Secundário. Acedido em 10 de janeiro de 2013, disponível em http://www.cnedu.pt/files/cnepareceresmodule/Parecer_2_2006.pdf?phpMyAdmin=nWb0ZYNY47nSvifA8BSCc4NedFa

Contreras, A., & Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9*(1), 65-84.

Costa, C. (2005). O processo de edição de manuais escolares, em Portugal, na década de 30 - um estudo de caso: J. Vicente Gonçalves e a sua obra para o ensino liceal. In D. Moreira & J. M. Matos (Eds.), *História do Ensino da Matemática em Portugal* (pp. 149-157). Lisboa: SEM-SPCE.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço – Matemática A 12º Ano*. Porto Editora.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Almedina.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82:97–124. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promothing multiple representation in álgebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gaspar, I., & Roldão, M. C. (2007). *Elementos de Desenvolvimento Curricular*. Lisboa: Universidade Aberta.

GAVE (2011). Exames Nacionais - Relatório 2011. Retrieved 10 janeiro 2013, from http://www.gave.min-edu.pt

GAVE (2012). Projeto Testes Intermédios - Relatório 2012. Retrieved 10 junho 2013, from http://www.gave.min-edu.pt

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre:ArtMed.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2/3),* 237–284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didática de la Matemática.Universidad de Granada. Retrieved 27 dezembro 2012, from http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didática de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspetiva ontosemiótica de investigación en Didática de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *ATA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10(2).* Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_portugues.pdf.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didática de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias*, 27(1), 59-76.

Godino, J. D., Rivas, H., & Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didática a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa, Ponta Grossa*, *7*(2), 331-354. Retrieved from http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa. doi:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0002

Godino, J.D., Wilhelmi, M. R., & Bencomo, D. (2005). "*Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion*". Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4.2, 1-26.

Gomes, L., & Raposo, D. (2012). *Matemática 12*. Asa Editores.

Henriques, H. C., & Almeida, C. (2005). O lúdico nas aritméticas do século XVI. In D. Moreira & J. M. Matos (Eds.), *História do Ensino da Matemática em Portugal* (pp. 141-148). Lisboa: SEM-SPCE.

Janeiro, J. (2005). Os manuais de Matemática: O que deles dizem os professores. *Atas do ProfMat 2005* (CD-ROM), Évora.

Jorge, F. R. (1994). O *computador e a educação matemática: Abordagens do tópico Sucessões*. Tese de mestrado. Universidade do Minho.

Kaput, J. (1992). Techonology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Lankshear, C., & Knobel, M. (2008). *Pesquisa Pedagógica - do projeto à implementação.* Porto Alegre: Artmed.

Leitão, A., & Cangueiro, L. (sd). Princípios e Normas do NCTM–um percurso pela Álgebra. Retrieved 14 janeiro 2013, from http://www.apm.pt/files/_Conf_Cangueiro_Leitao_487e4d92df2e1.pdf

Marques, S. (2006). *A Proporcionalidade Direta em Manuais Escolares de Diversos Países*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Martinho, M. & Negra, C. (2012). *Matemática A 12º Ano – Projeto Desafios*. Carnaxide: Santillana Constância.

Martinho, M. H., & Viseu, F. (2009). Desenvolvimento da literacia estatística em dois manuais do 7.º ano de escolaridade. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (orgs.), *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Mateus, A. L. (2012). *A dimensão crítica da literacia estatística nos manuais escolares.* Tese de mestrado. Instituto politécnico de Leiria.

McDonough, A., & Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. Em N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 261-268). Honolulu, HI: PME.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

National Council of Teacher of Mathematics (2008a). The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics. Retrieved 23 março 2013, from http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

Negra, C., & Martinho, E. (2012). *Desafios 12.º Ano – Matemática A*. Editora: Santillana.

Neves, M. A. F., Pereira, A., & Silva, J. N. (2012). *Matemática A 12º Ano*. Porto Editora.

Niss, M. (2003). *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. En Bernard L. Madison, B. L. and Steen L. A., Editors, Quantitative Literacy. Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*. Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C. on December 1-2, 2001. /National Council on Education and the Disciplines Princeton, New Jersey, 2003. pp. 215-220. Retrieved 27 dezembro 2012, from http://www.maa.org/ql/qltoc.html

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6*(9) 13-24. Retrieved from http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6957/6643

OCDE (2005). *Aprendendo para o Mundo de Amanhã: Primeiros Resultados do PISA 2003*. Brasil: Editora Moderna.

Oliveira, R. (2007). *Uma análise da abordagem da Álgebra nos manuais escolares do 3.º ciclo de escolaridade*. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida.* Tese de doutoramento, Universidade de Jaén. Jaén, Espanha.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo teoria e práxis.* Porto: Porto Editora, 2001.

Perrenoud, P. (1995). *Ofício de aluno e sentido de trabalho escolar*. Porto: Porto Editora.

Perrenoud, P. (Ed.) (2001). *Porquê construir competências a partir da escola? Desenvolvimento da autonomia e luta contra as desigualdades* (F. Alves, Trad.). Porto: Edições Asa.

Perret-Clermont, A. N. (2004). Thinking spaces of the young. In A.-N. Perret-Clermont, C. Pontecorvo, L. Resnick, T. Zittoun, & B. Burge (Eds.), *Joining society: social interaction and learning in adolescence and youth* (pp. 310). Cambridge: Cambridge University Press.

Pires, M. C. V. (2003a). *Influências do manual escolar no conhecimento profissional do professor: Um estudo no primeiro ciclo do ensino básico* (Trabalho de Investigação Tutelado, Universidade de Santiago de Compostela).

Pires, M. C. V. (2003b). *Conhecimento profissional e manuais escolares: Um estudo no 1.º ciclo.* In A. Cosme, H. Pinto, H. Menino, I. Rocha, M. Pires, M. Rodrigues, R. Cadima, & R. Costa (Eds.), Atas do XIV SIEM (pp. 525-544). Santarém:APM.

Polya, G. (1973). *Como Resolver Problemas*. Lisboa: Gradiva (2003).

Ponte, J. P. (2005a). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática, 4*(8), 149–170.

Ponte, J. P. (2005b). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática – Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Roldão, M. C. (1999). *Gestão Curricular. Fundamentos e práticas.* Lisboa: Ministério da Educação.

Roldão, M. C. (2003). *Gestão do currículo e avaliação de competências*: As questões dos professores. Lisboa: Editorial presença.

Roldão, M. C. (2008). *Gestão do currículo e avaliação de competências.* Lisboa: Editorial Presença.

Roldão. M. C. (2011). *Um currículo de currículos.* Chamusca: Edições Cosmos.

Santo, E. M. (2006). Os manuais escolares, a construção de saberes e a autonomia do aluno. Auscultação a alunos e professores. *Revista Lusófona de Educação, 8*, 103-115. Retrieved from http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/rle/n8/n8a07.pdf

Santos, H. (2010). *"Limite":um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal.* Tese de Mestrado. Universidade do Minho.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, C. (2003). *Uma análise de manuais escolares de 9º ano de escolaridade*. Tese de mestrado. Universidade do Porto.

Silva, C. (2004). O estado dos manuais escolares de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática, 80*, 46-50.

Silva, F. (2009). *O número racional em manuais escolares portugueses*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2001). *Matemática A – 10.º ano.* Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dgidc.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica_a_10.pdf.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002). *Matemática A – 12.º ano.* Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dgidc.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica_a_12.pdf.

Silverman, D. (2001). *Interpreting qualitative data: Methods for analysing talk, text and interaction*: 2nd edition, London: Sage.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The Role of Mathematics Curriculum Materials in Large-Scale Urban Reform: An Analysis of Demands and Opportunities for Teacher Learning. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). NY: Routledge.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. Em F. Lester (Ed.), Second *handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Teixeira, P., Precato, A., Albuquerque, C., Nunes, C., & Nápoles, S. M. (1999). *Brochura das Funções do 12.º ano – Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Viegas, C., Gomes, F., & Lima, Y. (2012). *Xeqmat 12 Matemática A*. Lisboa: Texto Editores.

Viseu, F., Fernandes, A., & Gonçalves, M. I. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de matemática. In B. Silva et al. (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 3178-3190). Braga: Universidade do Minho, Centro de Investigação em Educação.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2011). Manuais escolares e desprofissionalização docente: um estudo de caso com professores de Matemática. *Livro de Actas do XI Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogía* (pp. 991-1002). Corunha: Universidade da Corunha.

Young, M. F. D. (2010). *Conhecimento e currículo: do socioconstrutivismo ao realismo social na sociologia da educação.* Adaptação para a língua portuguesa de Jorge Ávila de Lima. Porto: Porto Editora.

Zabalza, M. (1992). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições.

LEGISLAÇÃO CONSULTADA

Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto.

Decreto-Lei n.º 74/2004 de 26 de março.

Decreto-Lei n.º 261/2007, de 17 de julho.

Decreto - Lei nº 6/2001, de 18 de janeiro.

Portaria n.º 792/2007, de 23 de julho.

Despacho n.º 19 575/2006, de 25 de setembro.

Despacho n.º 29 864/2007, de 27 de dezembro.

Despacho n.º 415/2008, de 4 de janeiro.

Despacho n.º 15 971/2012, de 14 de dezembro.

ANEXOS

Anexo 1 - Registo de apreciação, seleção e adoção de manuais escolares

Critérios de apreciação de manuais escolares ainda não submetidos a avaliação e certificação

Ano de Escolaridade:	
Área Curricular Disciplinar/Disciplina:	
Título do Manual:	
Editora:	

		Sim			Não
		Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente
1	**Organização e Método**				
1.1	Apresenta uma organização coerente e funcional, estruturada na perspectiva do aluno;				
1.2	Desenvolve uma metodologia facilitadora e enriquecedora das aprendizagens;				
1.3	Estimula a autonomia e a criatividade;				
1.4	Motiva para o saber e estimula o recurso a outras fontes de conhecimento e a outros materiais didácticos;				
1.5	Permite percursos pedagógicos diversificados;				
1.6	Contempla sugestões de experiências de aprendizagem diversificadas, nomeadamente de actividades de carácter prático/experimental;				
1.7	Propõe actividades adequadas ao desenvolvimento de projectos interdisciplinares.				

		Sim			Não
		Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente
2	**Informação**				
2.1	Adequa-se ao desenvolvimento das competências definidas no Currículo do respectivo ano e/ou nível de escolaridade;				
2.2	Responde aos objectivos e conteúdos do Programa/Orientações Curriculares;				
2.3	Fornece informação correcta, actualizada, relevante e adequada aos alunos a que se destina;				
2.4	Explicita as aprendizagens essenciais;				
2.5	Promove a educação para a cidadania;				
2.6	Não apresenta discriminações relativas a sexos, etnias, religiões, deficiências,...				

		Sim			Não
		Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente
3	**Comunicação**				
3.1	A concepção e a organização gráfica (*) do manual facilitam a sua utilização e motivam o aluno para a aprendizagem;				
3.2	Os textos são claros, rigorosos e adequados ao nível de ensino e à diversidade dos alunos a que se destinam;				
3.3	Os diferentes tipos de ilustrações (*) são correctos, pertinentes e relacionam-se adequadamente com o texto.				

(*) Caracteres tipográficos, cores, destaques, espaços, títulos e subtítulos, etc;
(*) Fotografias, desenhos, mapas, gráficos, esquemas, etc.

		Sim			Não
		Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente
4	**Características materiais**				
4.1	Apresenta robustez suficiente para resistir à normal utilização;				
4.2	O formato, as dimensões e o peso do manual (ou de cada um dos seus volumes) são adequados ao nível etário do aluno;				
4.3	Permite a reutilização.				

Critérios de apreciação de manuais escolares submetidos a avaliação e certificação

		Sim			Não
		Muito Adequado	Adequado	Pouco Adequado	Inadequado
1	**Adequação ao Projecto Educativo da Escola**				
1.1	Características do público-alvo;				
1.2	Características do meio envolvente;				
1.3	Diversidade social e cultural da comunidade escolar.				

Anexo 2 - Percentagem de escolas que adotaram cada um dos manuais

Através da consulta do site www.wook.pt, foi possível verificar quais os manuais adotados em cada escola de Portugal continental e dos arquipélagos da Madeira e dos Açores.

Deste modo, contabilizámos o número de escolas que adotou cada um dos manuais no referido ano letivo. A percentagem obtida para cada um dos manuais encontra-se registada no quadro que se segue. De referir, que há um número pouco significativo de escolas que não indicou o manual adotado.

		Editora	Título	Autores
47%	M1	Porto Editora	Novo Espaço – Matemática A	Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues
25%	M2	Porto Editora	Matemática A – 12.º ano	Maria Augusta Ferreira Neves
12%	M3	Texto Editora	Xeqmat 12 – Matemática A	Cristina Viegas, Yolanda Lima, Francelino Gomes
7%	M4	Texto Editora	Ípsilon 12 – Matemática A	Carlos Andrade, Pedro Pimenta, Paula Pinto Pereira, Cristina Viegas
5%	M5	Asa Editores	Matemática A12	Luzia Gomes, Daniela Raposo
4%	M6	Santillana	Matemática A 12.º ano	Emanuel Martinho, Cristina Negra